O PROBLEMA DOS CAMELOS

Um Experimento de Ensino Formativo baseado na Teoria Do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração

Gabriela Silva Lemes

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

INSTITUTO FEDERAL Goiás
Câmpus Jataí

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

[ ] Tese
[ ] Dissertação
[ ] Monografia – Especialização
[ ] TCC - Graduação
[X] Produto Técnico e Educacional - Tipo: **SEQUÊNCIA DIDÁTICA**
[ ] Artigo Científico
[ ] Capítulo de Livro
[ ] Livro
[ ] Trabalho Apresentado em Evento

Nome Completo do Autor: **Gabriela Silva Lemes**
Matrícula: **20182020280041**
Título do Trabalho: **O Problema dos Camelos: Um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração**

Autorização - Marque uma das opções

1. (**X**) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ( ) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ___/___/_____ (Embargo);
3. ( ) Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

( ) O documento está sujeito a registro de patente.
( ) O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
( ) Outra justificativa: ______________________________

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.
iv.

Jataí, 12 de Abril de 2021.

Gabriela Silva Lemes

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
SISTEMA INTEGRADO DE BIBLIOTECAS

INSTITUTO FEDERAL
Goiás

TERMO DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAÇÃO NO REPOSITÓRIO DIGITAL DO IFG - ReDi IFG

Com base no disposto na Lei Federal nº 9.610/98, AUTORIZO o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, a disponibilizar gratuitamente o documento no Repositório Digital (ReDi IFG), sem ressarcimento de direitos autorais, conforme permissão assinada abaixo, em formato digital para fins de leitura, download e impressão, a título de divulgação da produção técnico-científica no IFG.

Identificação da Produção Técnico-Científica

[ ] Tese
[ ] Dissertação
[ ] Monografia – Especialização
[ ] TCC - Graduação
[ ] Artigo Científico
[ ] Capítulo de Livro
[ ] Livro
[ ] Trabalho Apresentado em Evento
[X] Produto Técnico e Educacional - Tipo: **SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

Nome Completo do Autor: **DUELCI APARECIDO DE FREITAS VAZ**
Matrícula: **1613020**
Título do Trabalho: **O Problema dos Camelos: Um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração**

Autorização - Marque uma das opções

1. (**X**) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso aberto);
2. ( ) Autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG somente após a data ___/___/_____ (Embargo);
3. ( ) Não autorizo disponibilizar meu trabalho no Repositório Digital do IFG (acesso restrito).

Ao indicar a opção **2 ou 3**, marque a justificativa:

( ) O documento está sujeito a registro de patente.
( ) O documento pode vir a ser publicado como livro, capítulo de livro ou artigo.
( ) Outra justificativa: ______________________________

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O/A referido/a autor/a declara que:

i. o documento é seu trabalho original, detém os direitos autorais da produção técnico-científica e não infringe os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade;
ii. obteve autorização de quaisquer materiais inclusos no documento do qual não detém os direitos de autor/a, para conceder ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás os direitos requeridos e que este material cujos direitos autorais são de terceiros, estão claramente identificados e reconhecidos no texto ou conteúdo do documento entregue;
iii. cumpriu quaisquer obrigações exigidas por contrato ou acordo, caso o documento entregue seja baseado em trabalho financiado ou apoiado por outra instituição que não o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás.

Jataí, 12 de Abril de 2021.

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Assinatura do Autor e/ou Detentor dos Direitos Autorais

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIAS
CAMPUS JATAÍ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO PARA CIÊNCIAS DE MATEMÁTICA

O PROBLEMA DOS CAMELOS:

Um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração

Gabriela Silva Lemes

Duelci Aparecido de Freitas Vaz

Produto Educacional vinculado a dissertação:

A formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração: Um experimento de ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov

JATAÍ

2021

Autorizo, para fins de estudo e de pesquisa, a reprodução total ou parcial deste produto educacional, em meio convencional ou eletrônico, desde que a fonte seja citada.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)

Lemes, Gabriela Silva.

O problema dos camelos: um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração: Produto Educacional vinculado à dissertação "A formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração: um experimento de ensino baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov" [manuscrito] / Gabriela Silva Lemes e Duelci Aparecido de Freitas Vaz. -- 2021.

91 f.; il.

Produto Educacional (Mestrado) – IFG – Campus Jataí, Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, 2021.

Bibliografia.

1. Teoria histórico-cultural. 2. Teoria do ensino desenvolvimental. 3. Adição de fração. 4. Experimento de ensino. 5. Ensino de Matemática. I. Vaz, Duelci Aparecido de Freitas. II. IFG, Campus Jataí. III. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Téc.: Aquisição e Tratamento da Informação.
Bibliotecária – Rosy Cristina Oliveira Barbosa – CRB 1/2380 – Campus Jataí. Cód. F050/2021/1.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE GOIÁS
CÂMPUS JATAÍ

GABRIELA SILVA LEMES

A FORMAÇÃO DO PENSAMENTO TEÓRICO DO CONCEITO DE ADIÇÃO DE FRAÇÃO: UM EXPERIMENTO DE ENSINO BASEADO NA TEORIA DO ENSINO DESENVOLVIMENTAL DE DAVYDOV

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre(a) em Educação para Ciências e Matemática, defendida e aprovada, em 19 de março de 2021, pela banca examinadora constituída por: **Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz -** Presidente da banca / Orientador - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás; **Profa. Dra. Arianny Grasielly Baião Malaquias -** Membro interno - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás e **Prof. Dr. Jamur André Venturin -** Membro externo - Universidade Federal do Tocantins. A sessão de defesa foi devidamente registrada em ata que depois de assinada foi arquivada no dossiê da aluna.

(assinado eletronicamente)
Prof. Dr. Duelci Aparecido de Freitas Vaz
Presidente da banca / Orientador
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás

Documento assinado eletronicamente por:

- **Duelci Aparecido de Freitas Vaz**, **PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 29/04/2021 09:44:22.

Este documento foi emitido pelo SUAP em 10/03/2021. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.ifg.edu.br/autenticar-documento/ e forneça os dados abaixo:

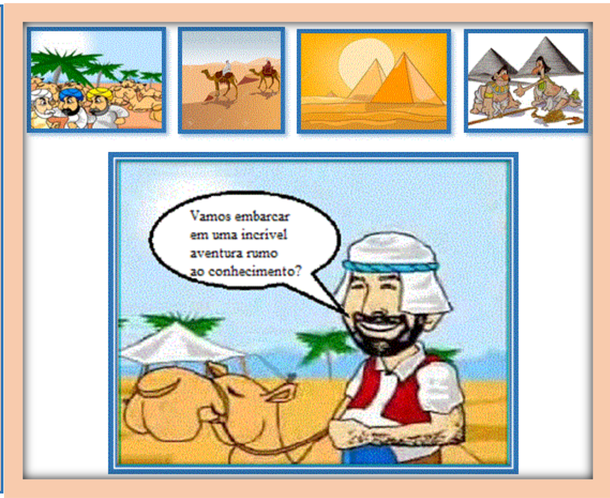
Código Verificador: 139109
Código de Autenticação: 82d27e36ae

Sugestão de um experimento de ensino para a formação do pensamento teórico do conceito de adição de fração

Produto Educacional de Mestrado apresentado ao programa de Pós Graduação em educação para Ciências e Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás- Campus Jataí, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação para Ciências e Matemática.

O PROBLEMA DOS CAMELOS:

Um experimento de ensino formativo baseado na Teoria do Ensino Desenvolvimental para a aprendizagem do conceito de adição de fração



Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Linha de Pesquisa: Fundamentos, metodologias e recursos para a Educação para Ciências e Matemática

Sublinha de Pesquisa: Ensino de Matemática

Orientador: Duelci Aparecido de Freitas Vaz

JATAÍ

2021

SUMÁRIO

Apresentação

Prezados professores/as, este produto educacional é fruto de uma pesquisa sobre o conceito de adição de fração, na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental de Davydov. Dessa forma, as tarefas de aprendizagem aqui sugeridas, **objetivam** a formação do pensamento teórico acerca do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, pelo método de ascensão do abstrato ao concreto, de acordo com as cinco ações de aprendizagem elencadas por Davydov (1988).

Sendo assim, este produto educacional, que se classifica como uma **sequência didática,** os alunos devem:

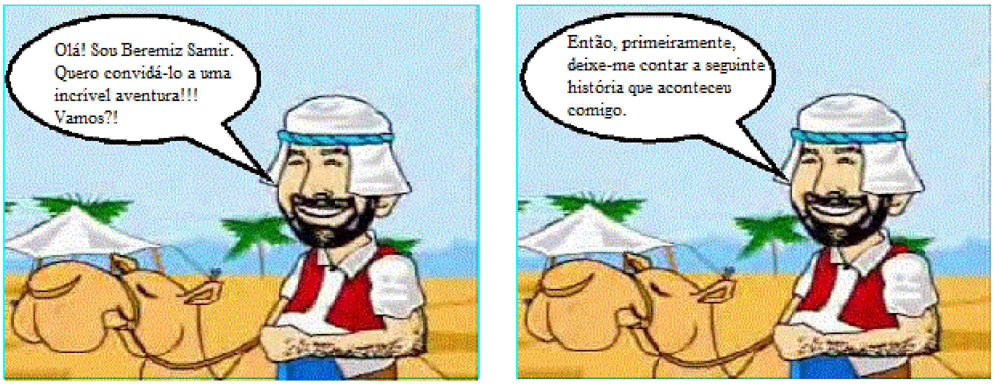
- **Nas aulas 1, 2, 3 e 4:** Identificar a relação geral do conceito de adição de fração com denominadores diferentes, que é a equivalência de fração, e identificar a relação geral do conceito de adição de fração com denominadores iguais, que é o conceito de inteiro;
- **Nas aulas 5 e 6:** A partir da história do conceito de fração, estabelecer um modelo gráfico, literal, que expressa as relações gerais identificadas nas aulas anteriores;
- **Na aula 7:** Introduzir mudanças na relação geral, descaracterizando o objeto, o que reforçará a sua base genética quando os alunos perceberem essa alteração;
- **Nas aulas 8 e 9:** Resolver situações particulares utilizando o procedimento geral estabelecido anteriormente, o que, segundo Freitas e Limonta (2012), implica que o aluno estará pensando teoricamente.
- **Na aula 10:** Realizar uma avaliação de si próprios.

Diante disso, as 10 aulas foram planejadas para serem realizadas com **turmas de 6º ano do ensino fundamental**, sendo cada aula de **50 (cinquenta) minutos.**

Portanto, a seguir, serão apresentadas as tarefas de aprendizagem, bem como, no final, as orientações para o professor ou professora sobre cada atividade.

Ótima Leitura!!!

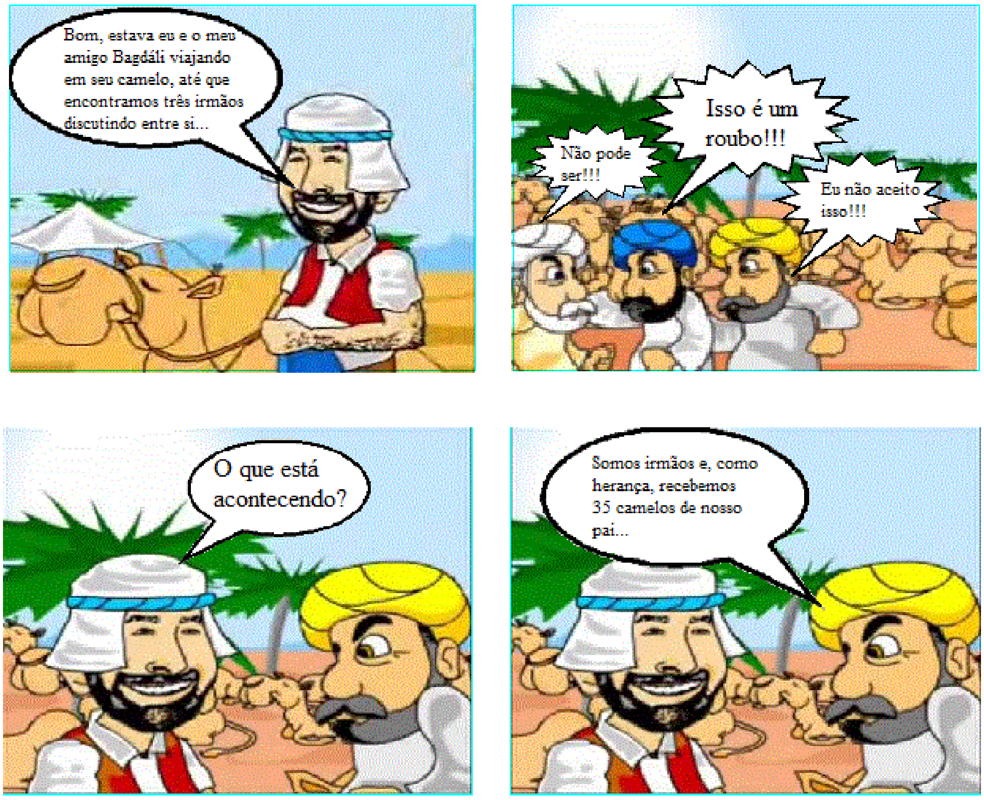
AÇÃO 1 – Aula 1

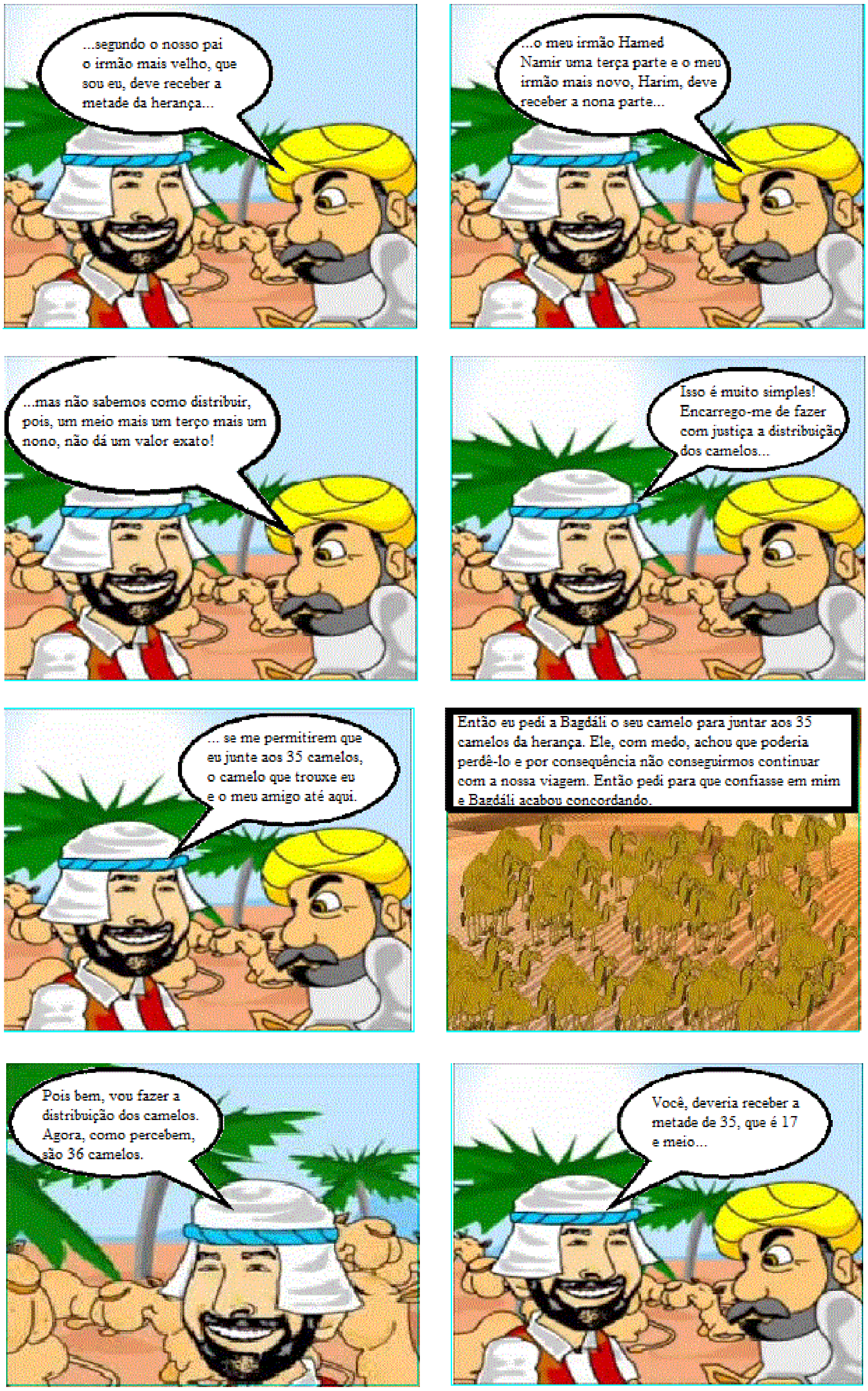


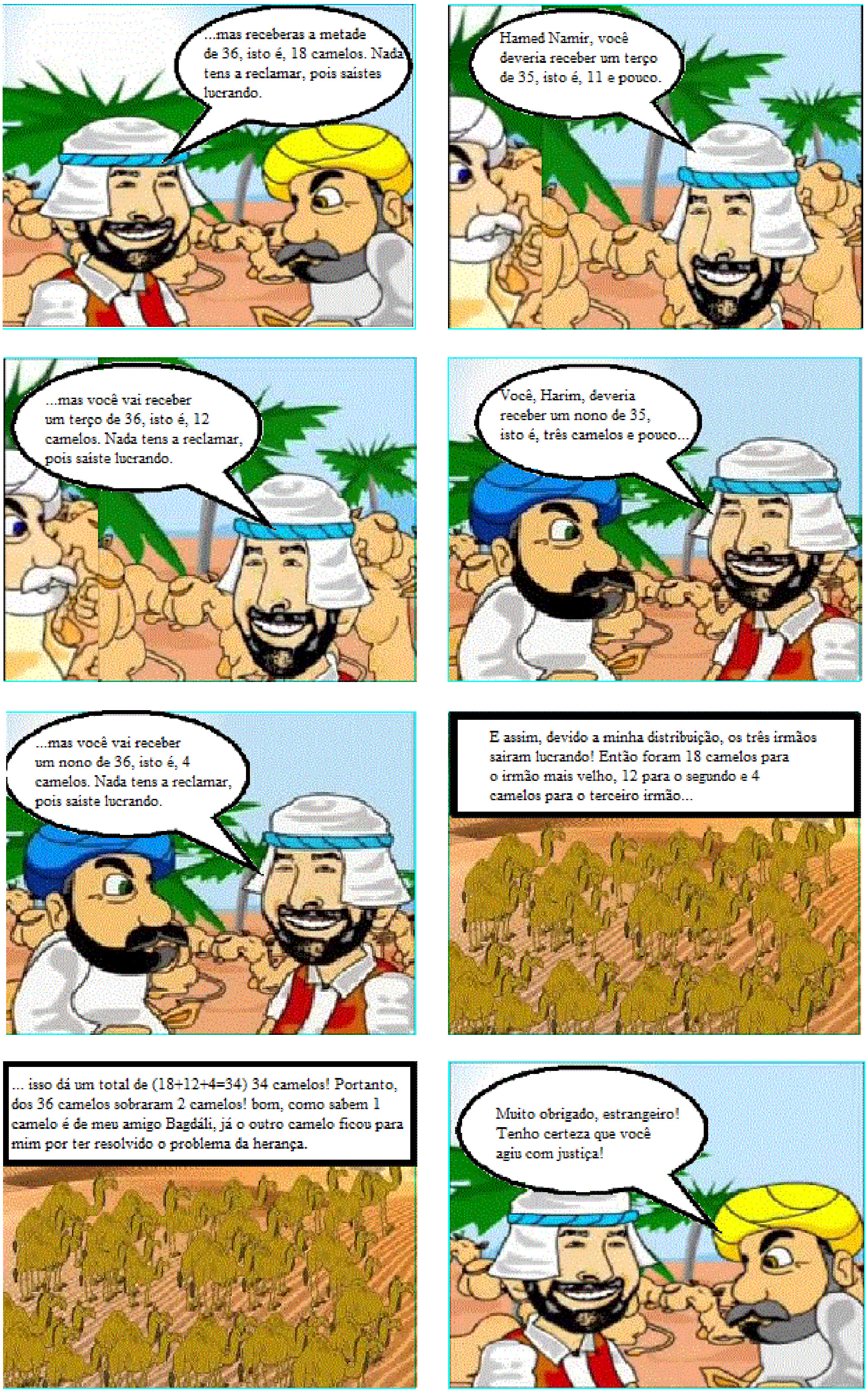
Fonte: elaborado pela autora.

Beremiz Samir é um incrível calculista e está convidando-o para embarcar em uma incrível aventura cheia de história, diversão e, é claro, com muita aprendizagem! Então, concentre-se nessa incrível história que aconteceu com ele e tente compreender a brilhante mente desse calculista. Vamos?!

O PROBLEMA DOS CAMELOS




...segundo o nosso pai o irmão mais velho, que sou eu, deve receber a metade da herança...
...o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e o meu irmão mais novo, Harim, deve receber a nona parte...
...mas não sabemos como distribuir, pois, um meio mais um terço mais um nono, não dá um valor exato!
Isso é muito simples! Encarrego-me de fazer com justiça a distribuição dos camelos...
... se me permitirem que eu junte aos 35 camelos, o camelo que trouxe eu e o meu amigo até aqui.
Então eu pedi a Bagdáli o seu camelo para juntar aos 35 camelos da herança. Ele, com medo, achou que poderia perdê-lo e por consequência não conseguirmos continuar com a nossa viagem. Então pedi para que confiasse em mim e Bagdáli acabou concordando.
Pois bem, vou fazer a distribuição dos camelos. Agora, como percebem, são 36 camelos.
Você, deveria receber a metade de 35, que é 17 e meio...


...mas receberas a metade de 36, isto é, 18 camelos. Nada tens a reclamar, pois saistes lucrando.
Hamed Namir, você deveria receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco.
...mas você vai receber um terço de 36, isto é, 12 camelos. Nada tens a reclamar, pois saiste lucrando.
Você, Harim, deveria receber um nono de 35, isto é, três camelos e pouco...
...mas você vai receber um nono de 36, isto é, 4 camelos. Nada tens a reclamar, pois saiste lucrando.
E assim, devido a minha distribuição, os três irmãos sairam lucrando! Então foram 18 camelos para o irmão mais velho, 12 para o segundo e 4 camelos para o terceiro irmão...
... isso dá um total de (18+12+4=34) 34 camelos! Portanto, dos 36 camelos sobraram 2 camelos! bom, como sabem 1 camelo é de meu amigo Bagdáli, já o outro camelo ficou para mim por ter resolvido o problema da herança.
Muito obrigado, estrangeiro! Tenho certeza que você agiu com justiça!

Fonte: elaborado pela autora.

Essa foi umas das incríveis histórias vividas por Beremiz e seu amigo Bagdáli. Sempre em suas viagens eles encontram muitos desafios... e, olha só! Beremiz tem um recado para você:

Fonte: elaborado pela autora.

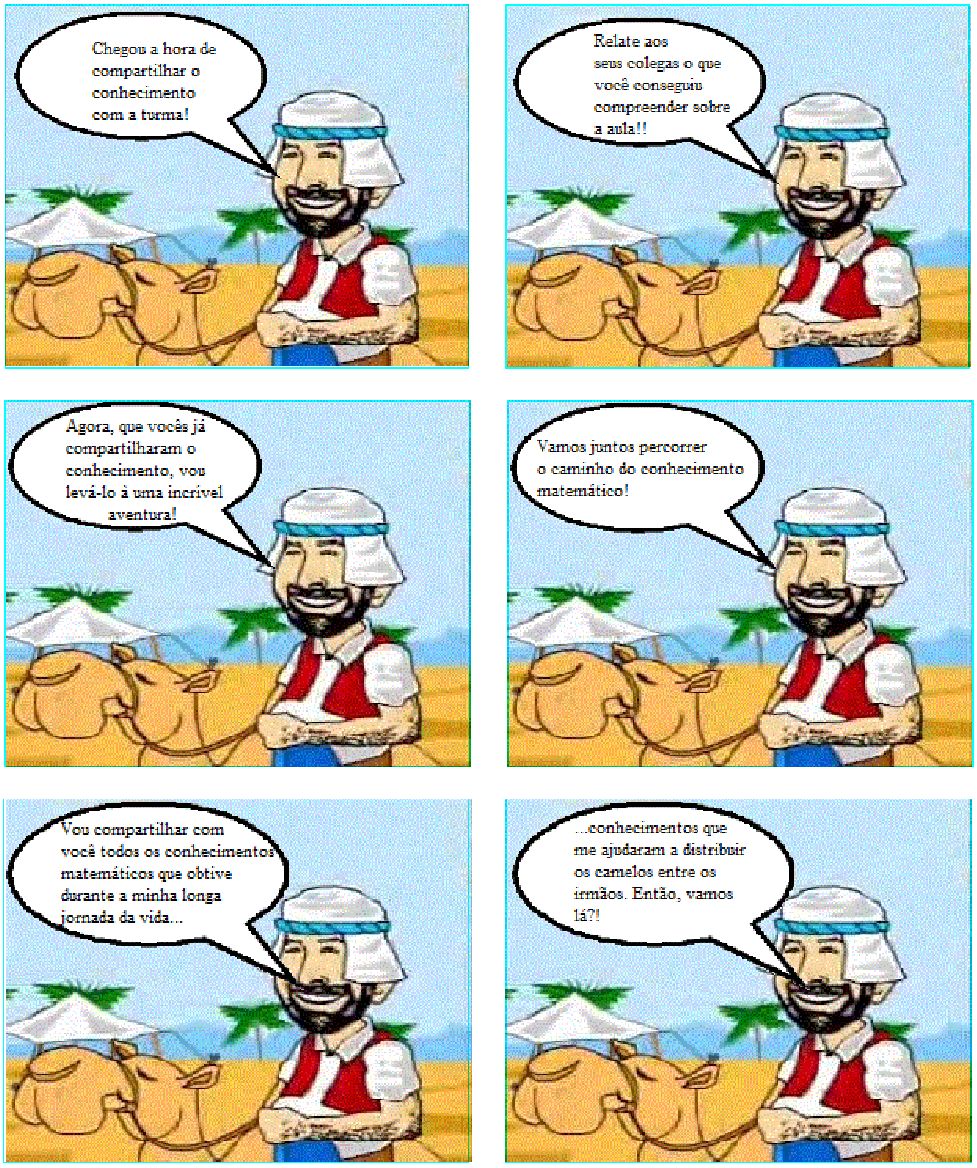
Beremiz Samir é um incrível calculista não é mesmo? Em meio a um grande problema conseguiu perceber uma solução e ainda saiu lucrando com tudo isso!

Bom, é claro que Beremiz não iria oferecer o camelo de seu amigo se ele soubesse que não sairia lucrando. Por exemplo, se fossem 35 bicicletas ou 35 bonecas, você daria a sua bicicleta ou a sua boneca se você soubesse que poderia perdê-la? Só se você saísse no final da história com duas bicicletas ou duas bonecas assim como Beremiz saiu com dois camelos, não é mesmo?

Mas, agora é com você! Tente compreender a brilhante mente desse Calculista! Para isso analise as seguinte questões e responda-as no espaço em branco a seguir:

- **Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?**

- **Como somar as frações da herança?**



Fonte: elaborado pela autora.

ORIENTAÇÕES:

Em resumo, o "Problema dos Camelos" conta a história de Beremiz Samir e de seu amigo Bagdáli, que viajavam juntos para Bagdá. No meio do caminho os dois amigos encontraram três irmãos que estavam discutindo entre si em relação a partilha da herança que o pai havia deixado para eles. A herança são 35 (trinta e cinco) camelos que deveriam ser divididos entre os irmãos da seguinte maneira: o irmão mais velho deveria receber a metade da herança; o irmão do meio deveria receber a terça parte da herança e, por fim, o irmão mais novo deveria receber a nona parte da herança. Entretanto, essa partilha não daria um número exato de camelos aos três irmãos.

Assim, Beremiz Samir se ofereceu para ajudar os três irmãos, juntando o camelo de seu amigo Bagdáli aos camelos da herança. Dessa forma, agora, com um total de 36 (trinta e seis) camelos, os três irmãos saíram lucrando, sendo que o irmão mais velho recebeu 18 (dezoito) camelos, o irmão do meio recebeu 12 (doze) camelos e, por fim, o irmão mais novo recebeu 4 (quatro) camelos. Além disso, Beremiz Samir, também saiu lucrando, conseguindo de volta o camelo de seu amigo Bagdáli e um camelo para si.

Diante dessa história, pergunta-se:

- **Qual o conhecimento matemático Beremiz Samir utilizou para confirmar que poderia dar o camelo de seu amigo para a partilha da herança, recebendo-o de volta, e ainda ganhar um camelo para si?**

O conhecimento matemático que Beremiz Samir utilizou foi a adição de fração com denominadores diferentes. Isso pode ser constatado, especificamente, no sétimo quadrinho da história (Apêndice A), onde o irmão mais velho diz: "[...] um meio mais um terço mais um nono não dá um valor exato". Sendo assim, Beremiz Samir percebeu que, ao somar as frações da herança, o resultado não equivale a um inteiro, ou seja, haveria uma "sobra". Por isso forneceu o camelo de seu amigo, recebendo-o de volta, e ganhou um camelo para si.

- **Como somar as frações da herança?**

Como o conhecimento matemático adição de fração com denominadores diferentes foi reconhecido na questão anterior, a forma como as frações da herança foi somada, diz respeito a relação geral principal que os alunos devem identificar, que é por meio do estabelecimento de frações equivalentes. Dessa forma, os estudantes precisam compreender que não se deve somar os denominadores das frações, mas igualá-los a um mesmo denominador para, assim, posteriormente, realizar a operação de adição. É evidente que o objetivo do "Problema dos Camelos" não é explicar como se realiza a adição de fração com denominadores diferentes, entretanto, vimos nesse problema uma possibilidade motivadora para a formação do conceito dessa operação, além de solucionar o próprio problema.

Diante disso, o objetivo da primeira ação de aprendizagem descrita por Davydov (1988), consiste na transformação dos dados da tarefa objetivando a identificação da relação geral do objeto de estudo. Sendo assim, a relação geral que os alunos devem identificar por meio do problema é que, para realizar a adição de fração com denominadores diferentes, devem ser estabelecidas frações equivalentes, sendo esta a relação geral que expressa o núcleo do objeto.

Para identificar a relação geral do objeto, devem ser propostas tarefas de aprendizagem. A primeira tarefa consiste na leitura da história em quadrinho, identificando o objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes, por meio da análise da história e diálogo entre os grupos e o professor.

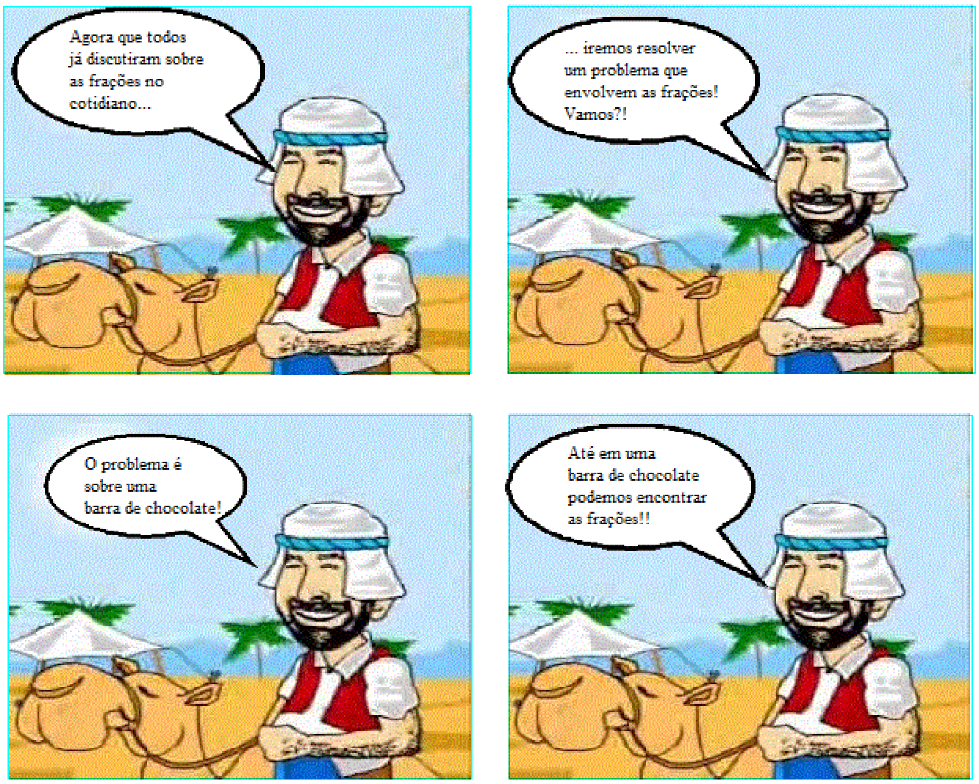
Após a identificação do objeto, outra tarefa de aprendizagem deve ser proposta. Nessa tarefa, os alunos devem analisar como somar as frações da herança obtendo o número não exato, e registrar essas informações em uma folha para, depois, serem discutidas entre a turma e o professor. Assim, este momento tem como objetivo verificar o que os alunos compreendem sobre adição de fração com denominadores diferentes.

AÇÃO 1 – Aula 2

Fonte: elaborado pela autora.

Beremiz Samir, está te convidando para conhecer as frações! Então, reflita um pouco sobre as situações do cotidiano que podemos encontrá-las! Olhe ao seu redor, imagine a sua casa, a sua rua, os supermercados e tente identificar onde podemos encontrar as frações!

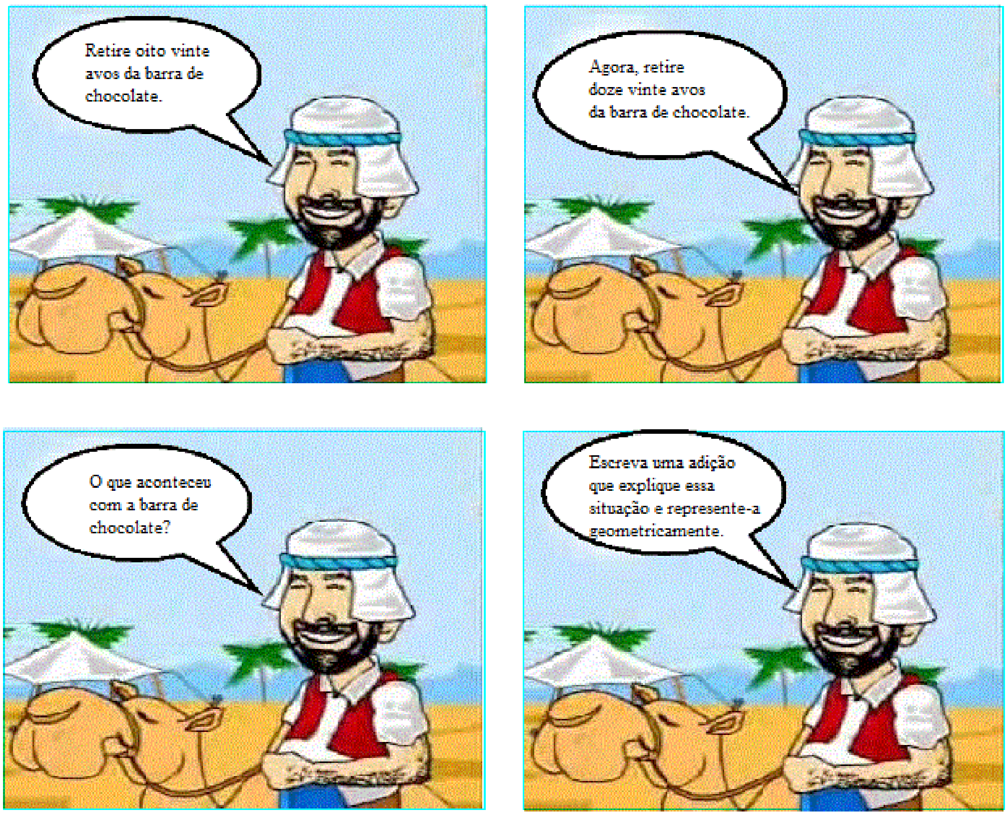
Além disso, discuta com os seus colegas de grupo, troque experiências com eles perguntando-os o que eles sabem sobre as frações!!!!



Fonte: elaborado pela autora

- **Hoje, antes de eu vir à escola, comprei uma barra de chocolate que possui um total de vinte retângulos que a forma. Assim, comi oito vinte avos da barra de chocolate e, agora a pouco, comi mais doze vinte avos. Qual é a fração que representa quanto eu comi, da barra de chocolate, hoje?**

Beremiz Samir quer te ajudar a analisar esse problema, vamos? Para isso, considere a barra de chocolate que está em cima de sua mesa e:



Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora.

- **Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?**

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em "deixar de lado", momentaneamente, o "Problema dos Camelos", indo em busca de conhecimento para, posteriormente, voltar ao problema e identificar a relação geral do objeto.

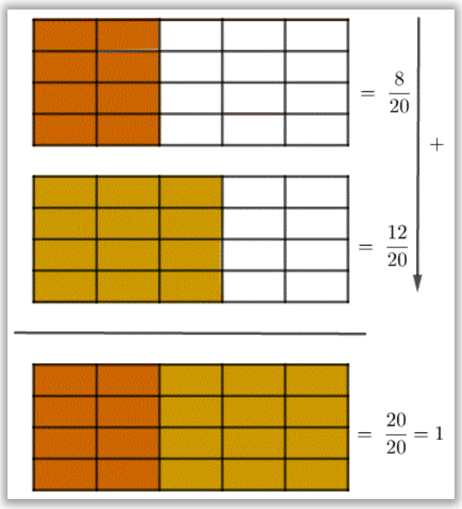
Assim, nesta aula, dever ser perguntado aos alunos se eles conseguem relacionar as frações com alguma situação do cotidiano. Após essa conversa o professor lançará a seguinte questão:

- **Hoje, antes de eu vir à escola, comprei uma barra de chocolate que possui um total de vinte retângulos que a forma. Assim, comi oito vinte avos da barra de chocolate e, agora a pouco, comi mais doze vinte avos. Qual é a fração que representa quanto eu comi, da barra de chocolate, hoje?**

Para isso, uma barra de chocolate contendo vinte retângulos que a forma, deverá ser dada aos alunos. Assim, os estudantes poderão retirar, primeiramente, oito vinte avos da barra de chocolate e, em seguida, mais doze vinte avos. Com isso será possível perceber que todos os retângulos foram retirados, logo a resposta é que a barra de chocolate foi comida por inteiro.

Uma representação numérica e geométrica dessa situação pode ser vista na figura 1:

Figura 1 – Representação numérica e geométrica para o problema da barra de chocolate



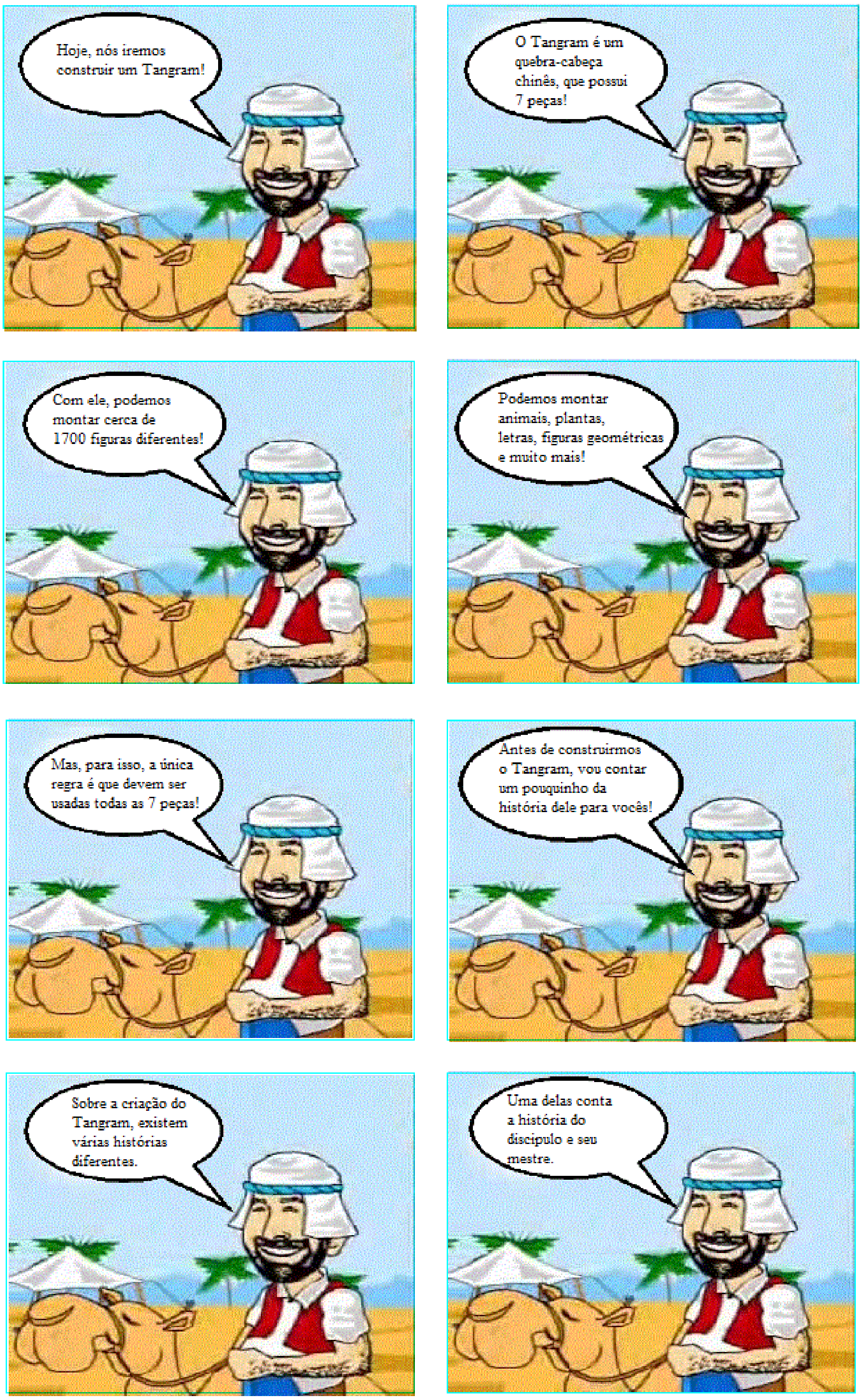
Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

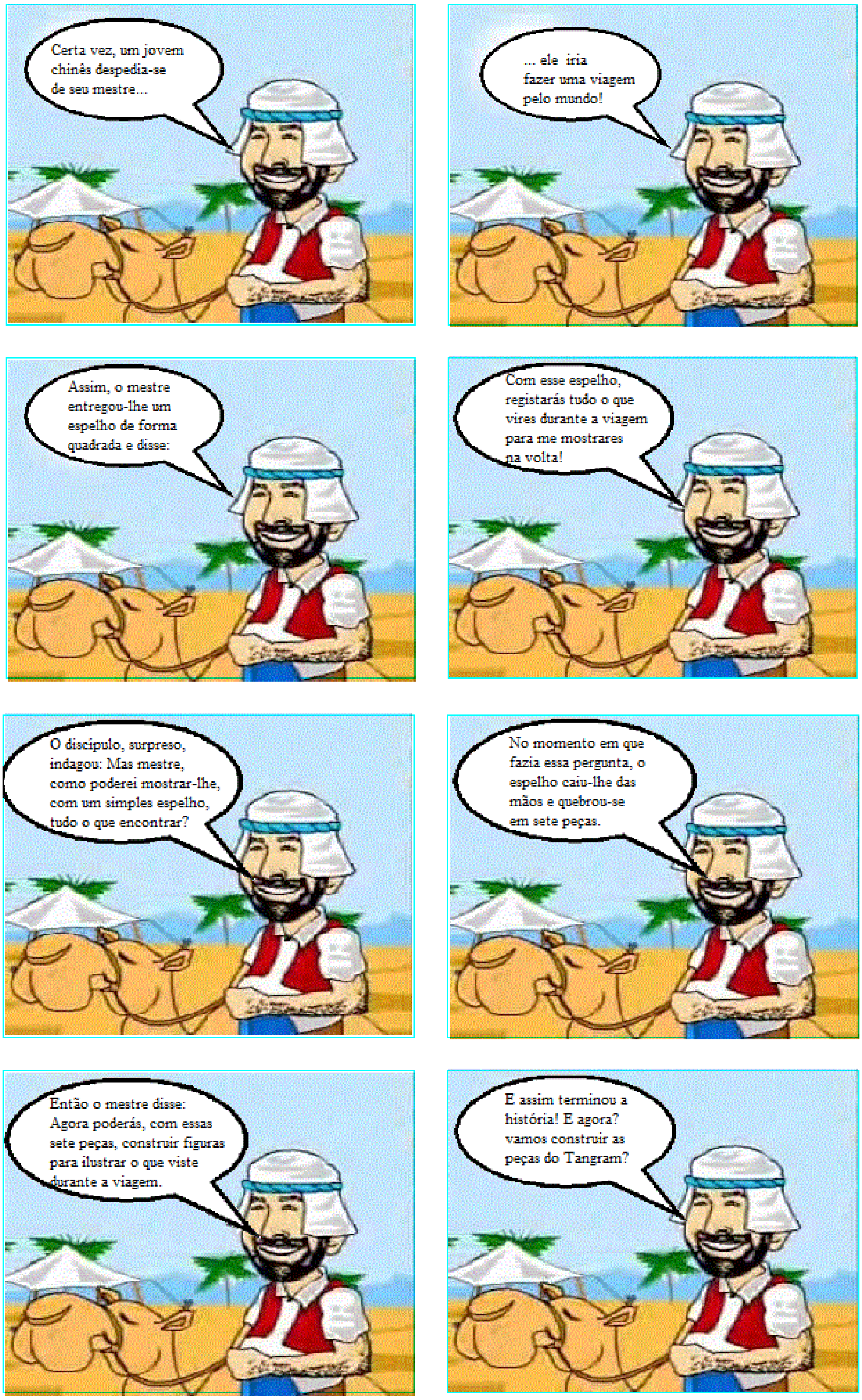
Terminada as análises, os grupos deverão apresentar os seus resultados para a turma. Assim, por meio de uma discussão, os alunos devem compreender como é a representação numérica e geométrica de uma adição de fração, o que é um inteiro e, por fim, o que significa o conceito de adição de fração com denominador igual, desencadeado pela pergunta:

- **Por que, na soma de fração, quando os denominadores são iguais, repete o denominador e soma os numeradores?**

Portanto, o objetivo é que os alunos possam compreender, por meio da manipulação do material (barra de chocolate) e da troca e experiências uns com os outros, como se dá a representação geométrica e numérica de fração, o significado do conceito da adição de fração com denominadores iguais e, também, a noção do inteiro.

AÇÃO 1 – Aula 3

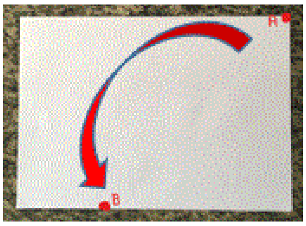

Hoje, nós iremos construir um Tangram!
O Tangram é um quebra-cabeça chinês, que possui 7 peças!
Com ele, podemos montar cerca de 1700 figuras diferentes!
Podemos montar animais, plantas, letras, figuras geométricas e muito mais!
Mas, para isso, a única regra é que devem ser usadas todas as 7 peças!
Antes de construirmos o Tangram, vou contar um pouquinho da história dele para vocês!
Sobre a criação do Tangram, existem várias histórias diferentes.
Uma delas conta a história do discípulo e seu mestre.

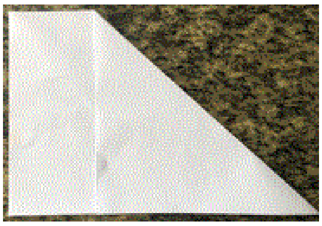


Fonte: elaborado pela autora.

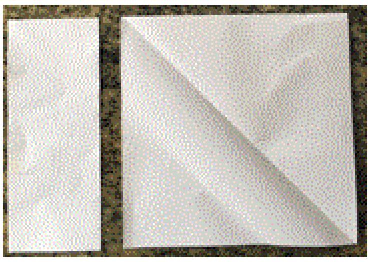
Agora, uma folha de papel A4 será entregue a você! Dessa forma, siga as recomendações a seguir e, com o auxílio de uma tesoura, construa as peças do Tangram!

Coloque o papel A4 na horizontal. Em seguida, dobre do ponto A até o ponto B. Será formado um triângulo.



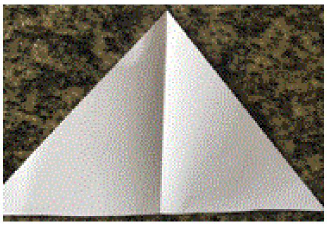


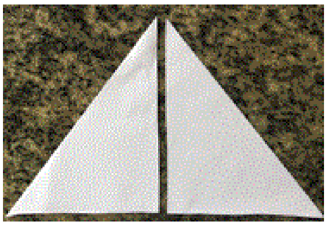
Agora, recorte o retângulo que sobrou e o descarte.



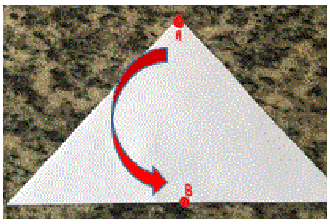
Agora, recorte o quadrado ao meio

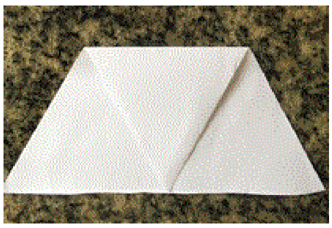
Dobre ao meio uma das metades e recorte-a



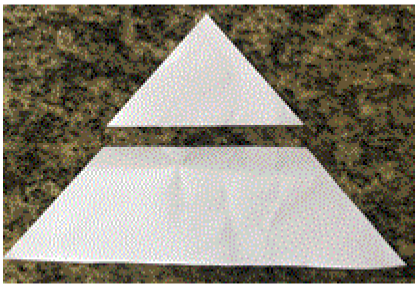


Com a outra metade que sobrou, dobre do ponto A até o ponto B

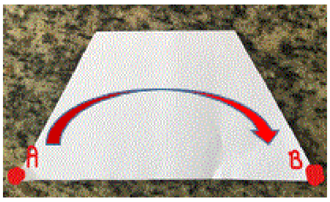


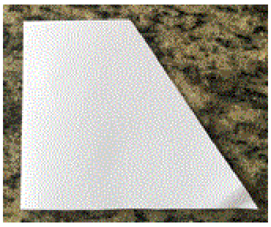


Em seguida, recorte conforme a figura

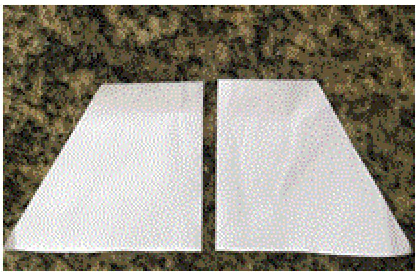


Com a parte de baixo, dobre do ponto A até o ponto B

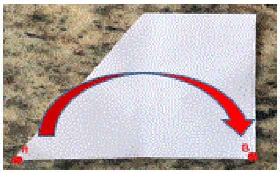




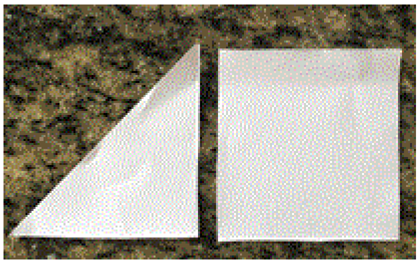
Em seguida, recorte conforme a figura



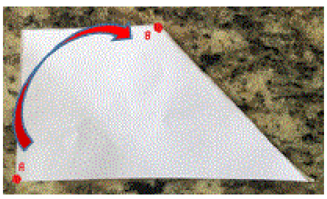
Com uma das metades, dobre do ponto A até o ponto B.

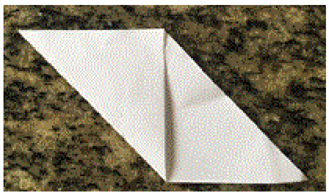


Em seguida, recorte conforme a figura

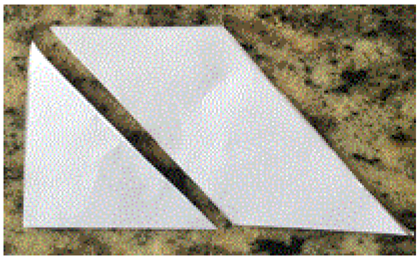


Com a outra metade, dobre do ponto A até o ponto B

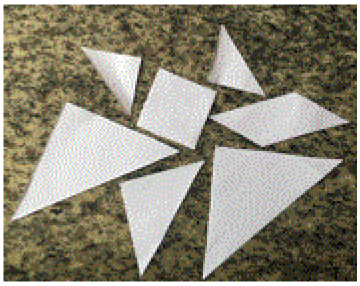




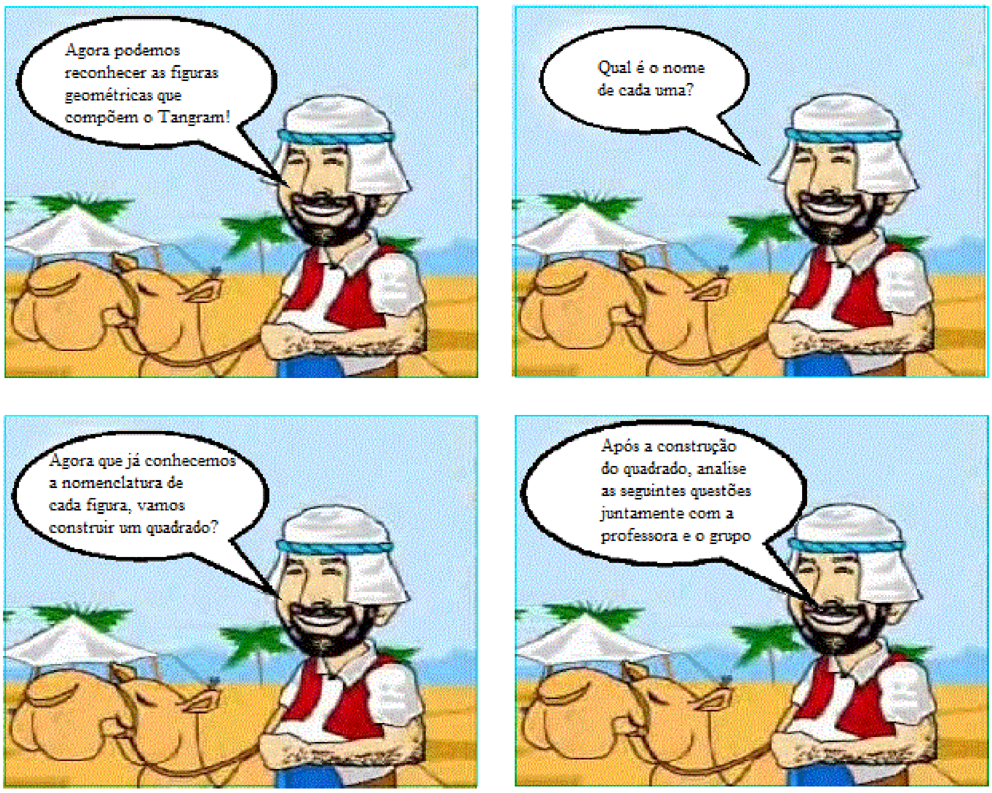
Em seguida, recorte conforme a figura



Estão prontas todas as sete peças do Tangram!



Fonte: elaborado pela autora.



Fonte: Elaborado pela autora.

- **Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?**

- **Qual fração podemos obter ao retirar o quadrado e o triângulo pequeno do Tangram? O que acontece com os numeradores e os denominadores das frações?**

- **Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos? Escreva uma adição que representa essa situação, e a represente geometricamente.**

- **O que significa, no Tangram, a fração oito dezesseis avos?**

Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora.

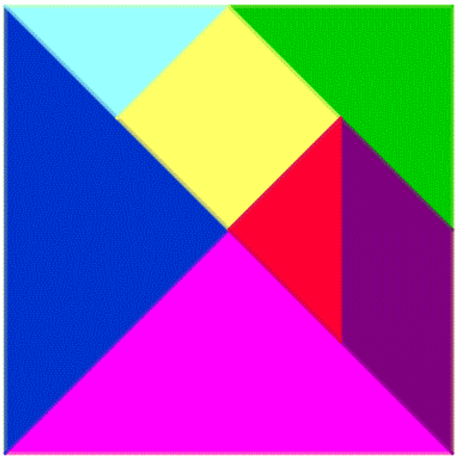
ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em construir um Tangram para que os alunos possam aplicar o conceito de adição de fração com denominadores iguais em situações de aprendizagem que o envolva, e generalizar esse conhecimento para a operação de subtração. Além disso, com o Tangram, visa introduzir o conceito de frações equivalentes.

O Tangram, é um quebra-cabeça chinês, que possui sete peças. São cinco triângulos, um quadrado e um paralelogramo. Estas peças são originadas da decomposição de um quadrado.

A figura 2, ilustra o Tangram:

Figura 2 – Tangram



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Segundo Santos (2019), o Tangram pode ser utilizado nas aulas de matemática para atingir diversos objetivos, como, por exemplo introduzir o conceito de operações com frações. Além disso,

> [...] o Tangram como auxílio didático em sala de aula, propícia um aumento de interesse, motivação e aprendizado por parte dos alunos, tornando as aulas mais dinâmica e produtiva, contando com maior participação dos educandos na explicação e discussão do conteúdo, facilitando a compreensão da ideia de fração e de sua simbologia, além de favorecer a interação entre eles, tornando-os sujeitos ativos no processo de aprendizagem (SANTOS, 2019, p. 83).

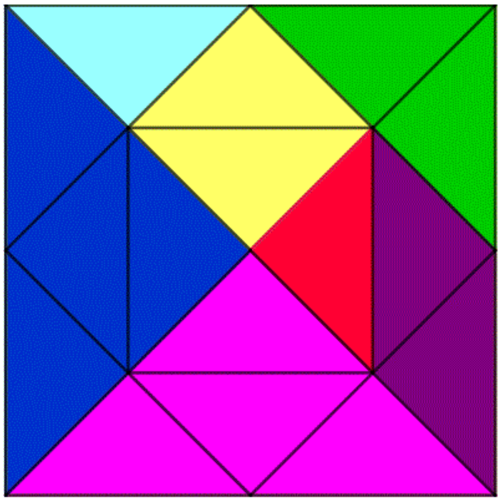
Para iniciar a aula, os alunos devem a história em quadrinho sobre o Tangram. Após, uma folha de papel A4 deve ser entregue a cada aluno para construí-lo.

Após a construção, os alunos deverão reconhecer as figuras geométricas, que compõe o Tangram, e com elas formar um quadrado. Posteriormente devem analisar as seguintes questões norteadoras:

- **Qual é a fração do inteiro que representa o paralelogramo, os dois triângulos pequenos, o triângulo médio e, por fim, o quadrado?**

Para respondermos a essa questão analisemos a figura 3, que mostra o Tangram, que pode ser subdivido em 16 (dezesseis) triângulos semelhantes ao triângulo pequeno.

Figura 3 – Tangram subdividido em 16 triângulos semelhantes ao triângulo pequeno



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Primeiramente, os alunos precisam analisar o quadrado e concluir que este é formado por 16 (dezesseis) triângulos semelhantes ao triângulo pequeno. Em seguida, é fácil verificar que a fração que representa o paralelogramo é $\frac{2}{16}$, pois cada triângulo que se formou equivale a $\frac{1}{16}$ do quadrado. Logo, a fração que representa o paralelogramo é igual a $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}$.

O mesmo processo equivale para determinar a fração do inteiro que representa o quadrado, os dois triângulos pequenos e o triângulo médio.

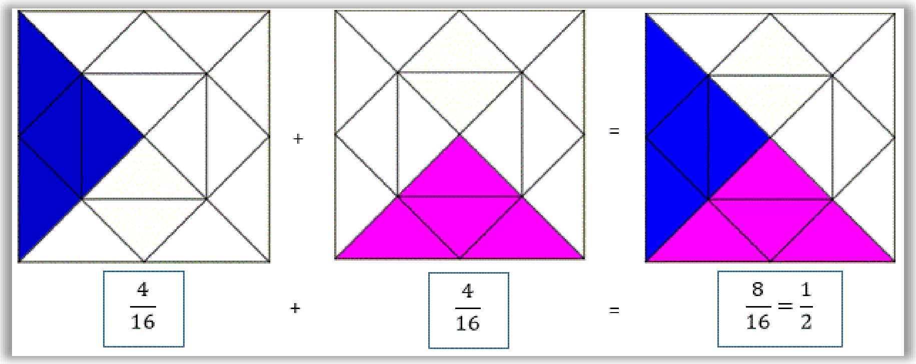
- **Qual fração podemos obter ao retirar o quadrado e o triângulo pequeno do Tangram? O que acontece com os numeradores e os denominadores das frações?**

O Tangram pode ser representado pela fração $\frac{16}{16}$. Como o quadrado equivale a $\frac{2}{16}$ do Tangram, e o triângulo pequeno equivale a $\frac{1}{16}$, logo temos que os dois juntos equivale a $\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$. Diante disso, ao retirarmos do Tangram um dos triângulos pequenos mais o quadrado, temos a seguinte subtração: $\frac{16}{16}-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$. Portanto, os alunos devem concluir que, fração com denominadores iguais, o denominador não muda, assim como na adição de fração com denominadores iguais, pois os valores que estão sendo retirados do Tangram partem de um mesmo valor inteiro.

- **Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos? Escreva uma adição que representa essa situação, e a represente geometricamente.**

A figura 4, mostra uma adição que representa essa situação e sua representação geométrica:

Figura 4 – Qual é a fração que representa os dois triângulos grandes juntos?



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

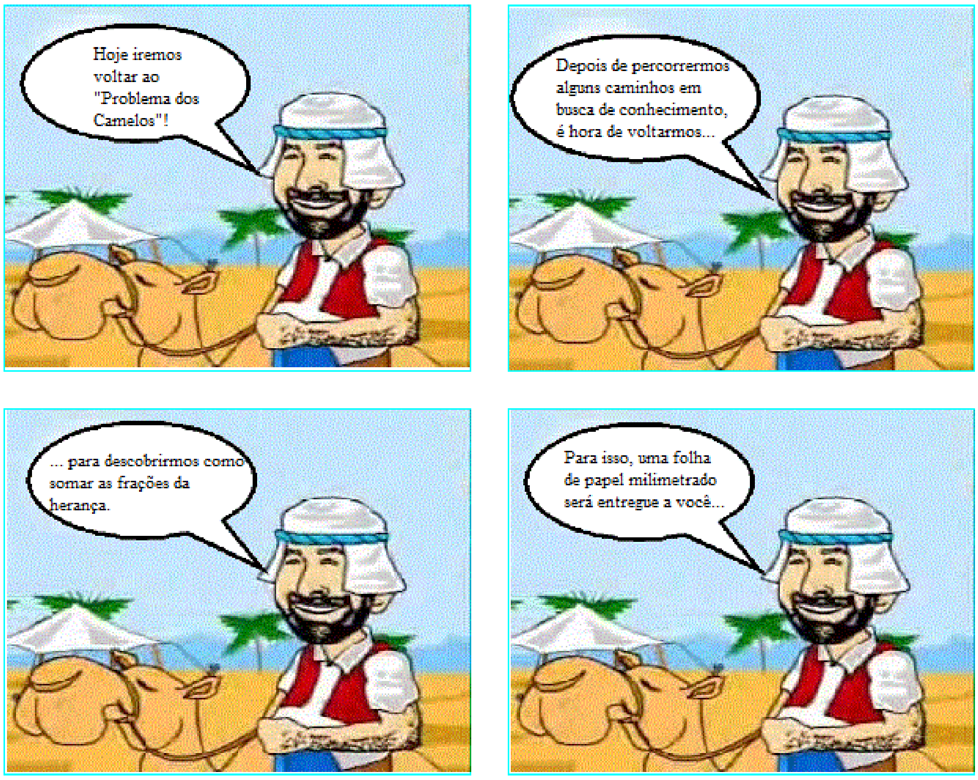
Analisando a figura 4, cada triângulo grande equivale a $\frac{4}{16}$ do Tangram. Logo, temos que $\frac{4}{16} + \frac{4}{16} = \frac{8}{16}$. Portanto, a fração que representa os dois triângulos juntos é igual a $\frac{8}{16}$.

Posteriormente, os alunos deverão apresentar os seus resultados para toda a turma. Em seguida, deve ser perguntado:

- **O que significa, no Tangram, a fração oito dezesseis avos?**

O objetivo é que os estudantes percebam, por meio da representação geométrica e do Tangram, que a fração $\frac{8}{16}$ é a metade do quadrado, logo esta fração é equivalente a fração $\frac{1}{2}$.

AÇÃO 1 – Aula 4



Fonte: elaborado pela autora

Agora que você está com a folha de papel milimetrado em mãos, analise e responda a seguinte questão:

- **Nas aulas anteriores, representamos geometricamente e numericamente a adição de fração com denominadores iguais. Diante disso, reflita sobre as aulas passadas e escreva uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las.**

Fonte: elaborado pela autora.

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em voltar ao problema dos camelos para identificar a relação geral do objeto adição de fração com denominadores diferentes, que é a equivalência de frações.

Especificamente, será pedido aos alunos que escrevam uma adição para as frações do problema, que são elas: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$.

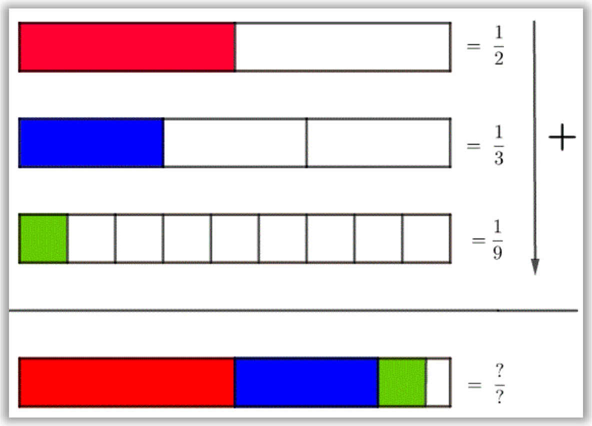
Uma vez que a soma de frações com denominadores iguais já é conhecida tanto numericamente quanto geometricamente, basta que os alunos façam uma analogia das aulas anteriores, tendo em vista realizar o mesmo processo, agora, para as frações com denominadores diferentes.

Portanto, será lançada a seguinte questão:

- **Nas aulas anteriores, representamos geometricamente e numericamente a adição de fração com denominadores iguais. Diante disso, reflita sobre as aulas passadas e escreva uma solução geométrica, no papel milimetrado, que representa a adição das frações da herança, obtendo, assim, a resposta de como somá-las.**

Com isso, por meio de um processo de análise e reflexão entre professor e alunos, estes deverão perceber que, para se realizar a adição de fração com denominadores diferentes, é preciso obter um denominador comum. Geometricamente, temos a seguinte explicação:

Figura 5 – Solução geométrica que represente a adição das frações da herança



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

De acordo com a figura 5, temos que, o primeiro retângulo, está divido em duas partes iguais, onde uma parte foi pintada. A parte pintada representa $\frac{1}{2}$ do total. Em seguida, o segundo retângulo está dividido em três partes iguais, onde, uma parte foi pintada. A parte pintada representa $\frac{1}{3}$ do total. Por fim, o terceiro retângulo, está dividido em nove partes iguais, onde, assim como nos casos anteriores, uma parte foi pinta. A parte pintada representa $\frac{1}{9}$ do total. Diante disso, verifica-se que não é possível "encaixar" com total perfeição as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ no quarto retângulo.

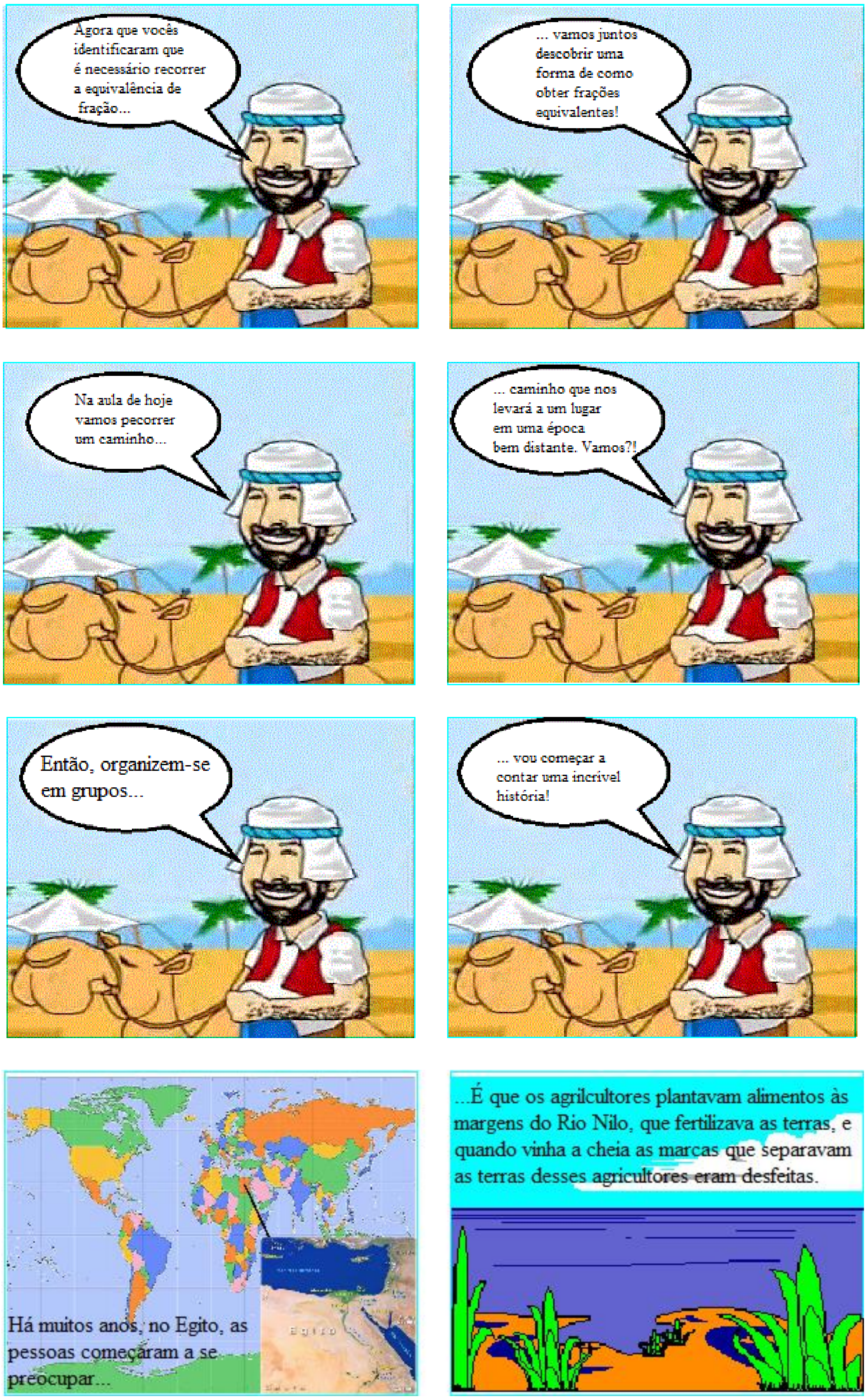
Diferentemente desse caso, nas aulas anteriores sobre adição de fração com denominadores iguais, as frações representavam um mesmo valor inteiro. Agora, como realizar a operação de adição de fração quando o denominador não é o mesmo? Para responder a essa pergunta os alunos devem, juntamente com o professor, por meio de uma análise e reflexão dos conhecimentos apropriados nas aulas anteriores, perceber que é necessário recorrer a equivalência entre frações, que é a relação geral do objeto de estudo adição de fração com denominadores diferentes.

Para que os alunos identifiquem a relação geral, será recordada a aula sobre a barra de chocolate, de forma que percebam que as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ não representam o mesmo inteiro, diferentemente de quando as frações possuem o mesmo denominador. Posteriormente, será relembrada a aula sobre o Tangram, perguntado, novamente, o que significa a fração$\frac{8}{16}$ e $\frac{1}{2}$.

Diante disso, por meio de um diálogo e reflexão, deverão perceber que equivalem a metade do quadrado, ou seja, correspondem a uma mesma quantidade. Assim, utilizaremos desse exemplo para as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$ e, como os alunos sabem que estas não representam um mesmo valor, logo perceberão que é necessário recorrer a equivalência de frações, de forma que possam "igualá-las" a um mesmo inteiro para, assim, realizar a operação de adição para quando os denominadores forem diferentes.

AÇÃO 2 – Aula 5

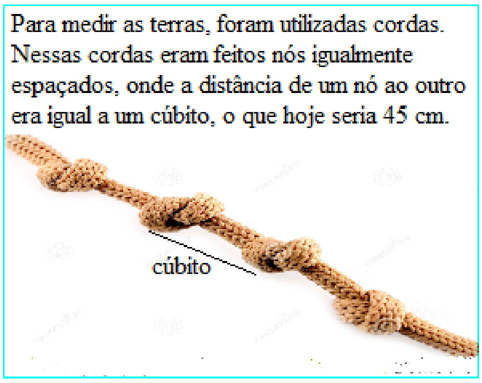
Parte 1

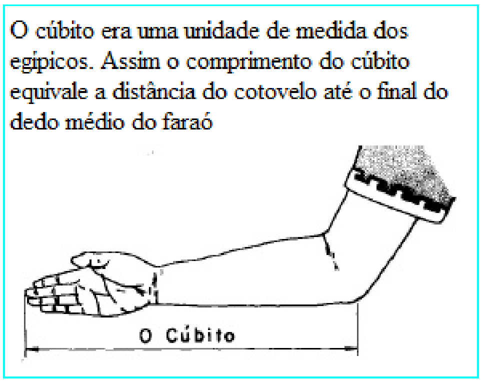


Fonte: continua

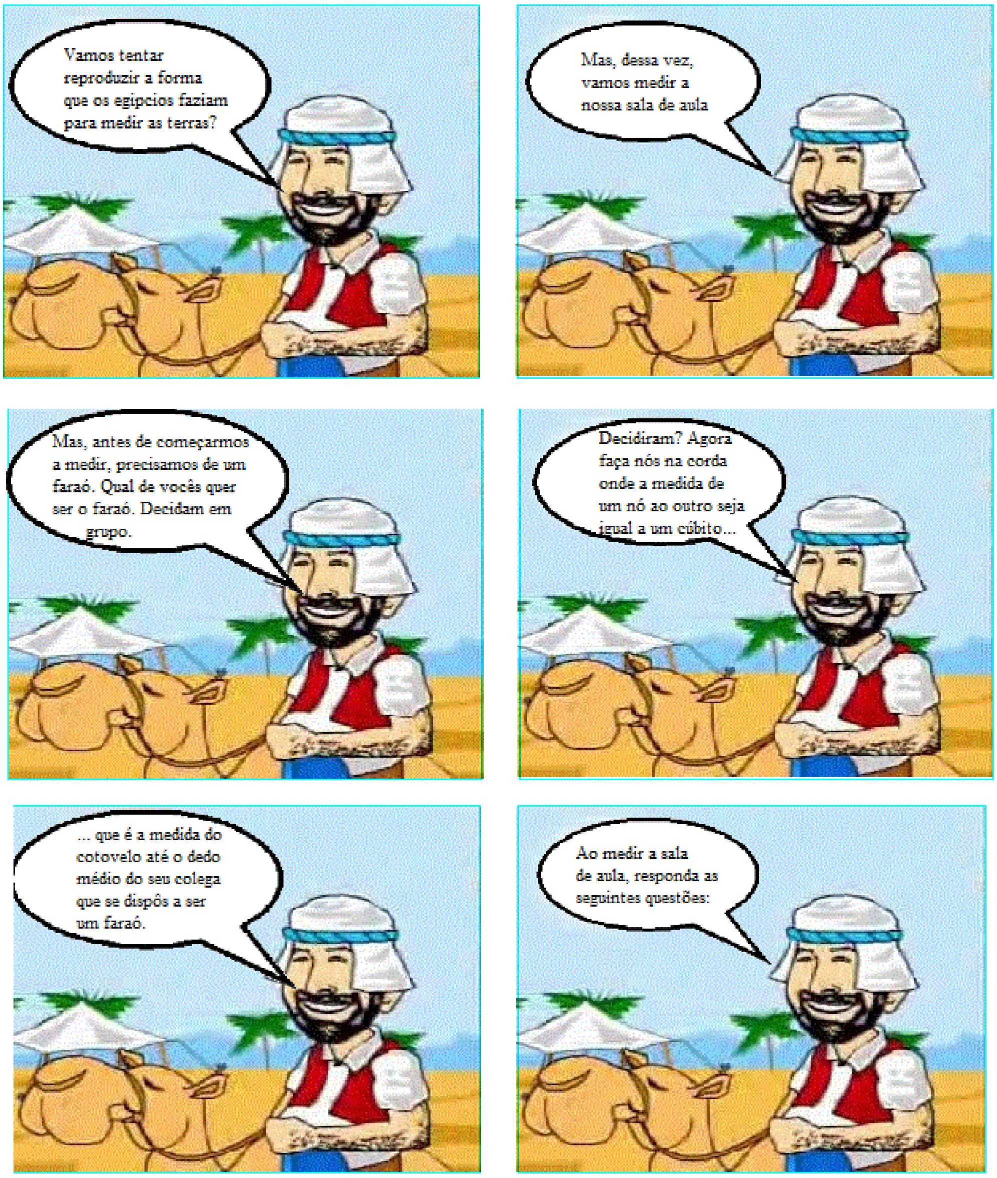
Fonte: elaborado pela autora.

Parte 2





Fonte: continua.



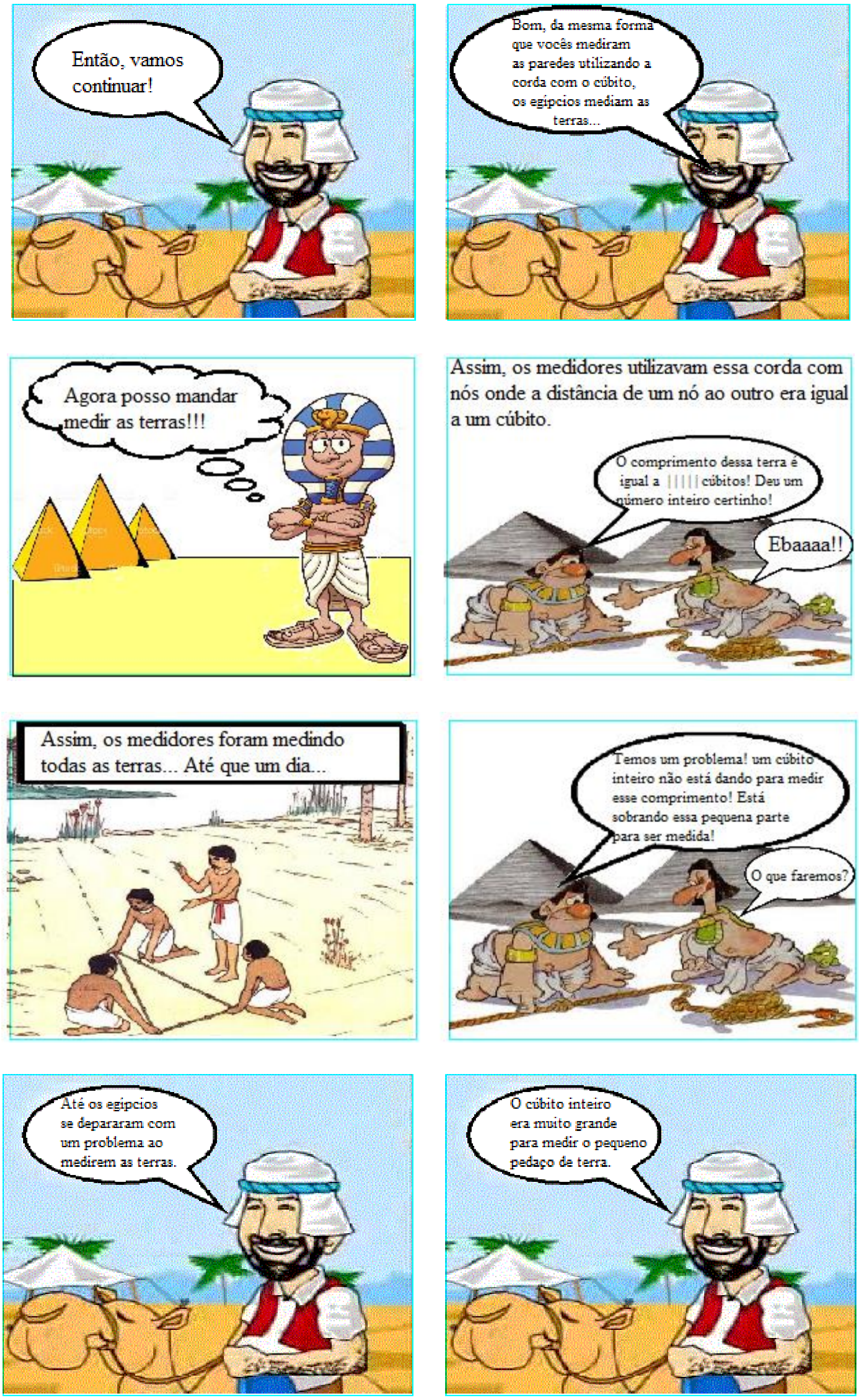
Fonte: elaborado pela autora.

PERGUNTAS	RESPOSTAS
1. Quantos cúbitos possui a frente da sala de aula?	
2. Quantos cúbitos possui o fundo da sala de aula?	
3. Quantos cúbitos possui os dois lados da sala de aula?	
4. Quantos cúbitos a sala de aula possui no total?	
5. O cúbito inteiro conseguiu medir a frente, fundo e os lados da sala de aula, sem sobrar um pedaço sequer para ser medido? Explique o que aconteceu.	

Fonte: elaborado pela autora

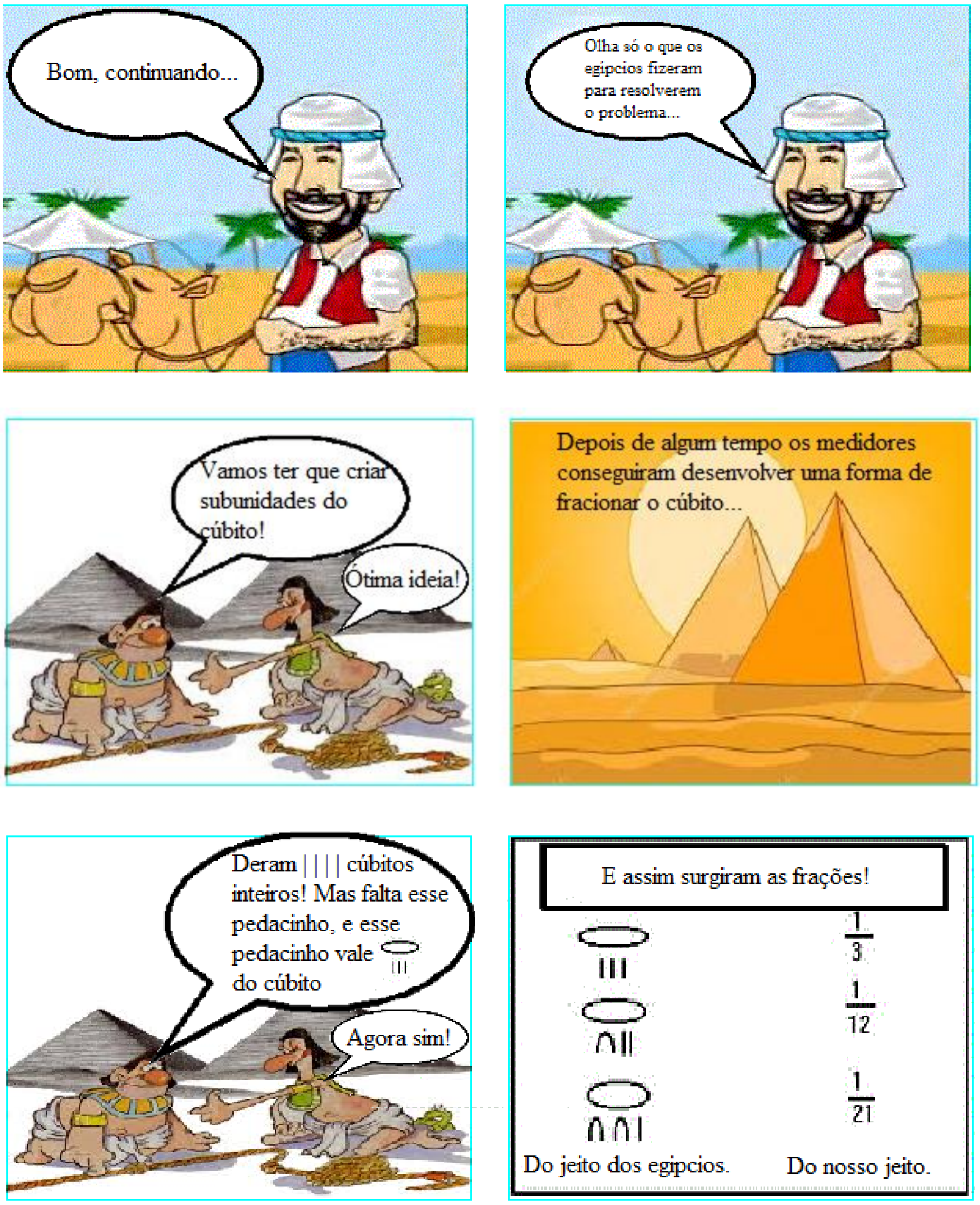
O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?

Parte 3



Fonte: elaborado pela autora.

- **Vocês se depararam com o mesmo problema ao medirem a sala de aula, onde o cúbito não foi suficiente para medir? Como podemos ajudar os agrimensores a medir as terras?**



Fonte: elaborado pela autora

E foi assim que surgiram as frações! Os egípcios faziam subunidades do cúbito para conseguir medir as terras! Essas subunidade do cúbito podemos chamar de uma parte do cúbito ou uma fração do cúbito. Portando, o surgimento das frações se deve a uma necessidade de medir, ou seja, a unidade de medida padrão da época, que era cúbito, não foi suficiente para fazer as medições, sendo necessário subdividi-lo.

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em ler a história em quadrinho sobre a história do conceito de fração. Dessa forma, tarefas de aprendizagem devem ser propostas para que os alunos reconstruam o acontecimento histórico, que revela o surgimento das frações, à medida que forem lendo a história em quadrinho.

Nesse sentido, a história em quadrinho foi dividida em 3 (quatro) partes, que serão esplanadas a seguir:

Parte 1

Na primeira parte da história em quadrinho, a pesquisadora convidará os alunos a embarcarem em uma grande aventura, juntamente com Beremiz Samir, a fim de descobrir como as frações surgiram para, depois, encontrar uma forma de obter frações equivalentes.

Assim, a história inicia no antigo Egito, com um sério problema: Os agricultores plantavam alimentos às margens do Rio Nilo, que fertilizavam as terras, e quando vinha a cheia as marcas que separavam as terras dos agricultores eram desfeitas. Sendo assim, o faraó precisou mandar medir novamente as terras, mas como ele fará isso?

Portanto, os alunos devem **indicar algum instrumento de medida, que existe atualmente, que pode ser utilizado para medir as terras às margens do rio Nilo**. Sendo assim, podem mencionar instrumentos de medida, tais como: Régua, fita métrica, trena, dentre outros.

O objetivo desta tarefa de aprendizagem é a identificação de instrumentos de medida utilizados atualmente para que, na próxima ação, quando mencionar que os egípcios faziam uso de cordas com nós igualmente espaçados, percebam que os objetos existentes passaram por um processo de transformação, ou evolução no decorrer da história e que isso continua acontecendo.

A figura 6 a seguir, mostra onde os alunos devem escrever, na atividade impressa, os instrumentos de medida que existem hoje. Após, as respostas deverão ser discutidas entre os grupos.

Figura 6 – Indicação de instrumentos de medida

Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora

Parte 2

A segunda parte da história em quadrinho, diz que o instrumento de medida utilizado pelos egípcios eram cordas com nós igualmente espaçados, onde a distância de um nó ao outro era igual a 1 (um) cúbito. Assim, a história continua dizendo que o cúbito era a unidade de medida da época e, que este, era a distância do cotovelo até o dedo médio do faraó.

Dessa forma, será pedido a cada grupo que elejam um faraó para tomar a sua medida. Cada grupo, portanto, terá o seu faraó. Assim, será disponibilizado um rolo de barbante para que os integrantes de cada grupo tomem a medida que vai do cotovelo até o dedo médio do faraó escolhido. Os critérios para a indicação ficarão a escolha dos alunos.

Tendo o barbante como instrumento de medida, os alunos deverão medir a sala de aula, ou seja, a frente, o fundo e os outros dois lados da sala, escrevendo os resultados na atividade impressa. Sendo assim, serão orientados para escreverem, por exemplo: “A frente da sala possui 15 (quinze) cúbitos” ou, quando o cúbito não for suficiente para medir poderão escrever: “A frente da sala possui 15 (quinze) cúbitos e mais um pouco”.

Após as medições, escreverão na atividade impressa se o cúbito inteiro conseguiu medir toda a sala de aula. Se não, será preciso explicar o que aconteceu.

A figura 7, mostra onde os alunos devem escrever, na atividade impressa, as suas respostas:

Figura 7 – Local da atividade impressa onde as medidas da sala deverão ser escritas

PERGUNTAS	RESPOSTAS
1. Quantos cúbitos possui a frente da sala de aula?	
2. Quantos cúbitos possui o fundo da sala de aula?	
3. Quantos cúbitos possui os dois lados da sala de aula?	
4. Quantos cúbitos a sala de aula possui no total?	
5. O cúbito inteiro conseguiu medir a frente, fundo e os lados da sala de aula, sem sobrar um pedaço sequer para ser medido? Explique o que aconteceu.	

Fonte: elaborado pela autora.

Posteriormente, os resultados devem ser discutidos entre a turma. Em seguida, o professor deve lançar a seguinte questão para discussão:

- **O que podemos fazer com o cúbito, para medir a sala de aula, já que este inteiro não foi suficiente para medir?**

Portanto, o objetivo desta segunda tarefa de aprendizagem é que os alunos percebam que os instrumentos de medida evoluíram ao decorrer da história, ao perceberem que os egípcios utilizavam cordas para medir. Além disso, os alunos devem compreender que, para medir, é necessário fracionar o cúbito, já que este inteiro não é suficiente, introduzindo, então, o surgimento do conceito de fração.

Parte 3

A terceira parte da história em quadrinho, conta que os agrimensores mediram as terras assim como os alunos mediram a sala de aula, usando a corda como instrumento de medida e tendo o cúbito como unidade de medida. Assim, os agrimensores se depararam com um problema: o cúbito inteiro não era suficiente para fazer as medições.

Portanto, será perguntado aos alunos:

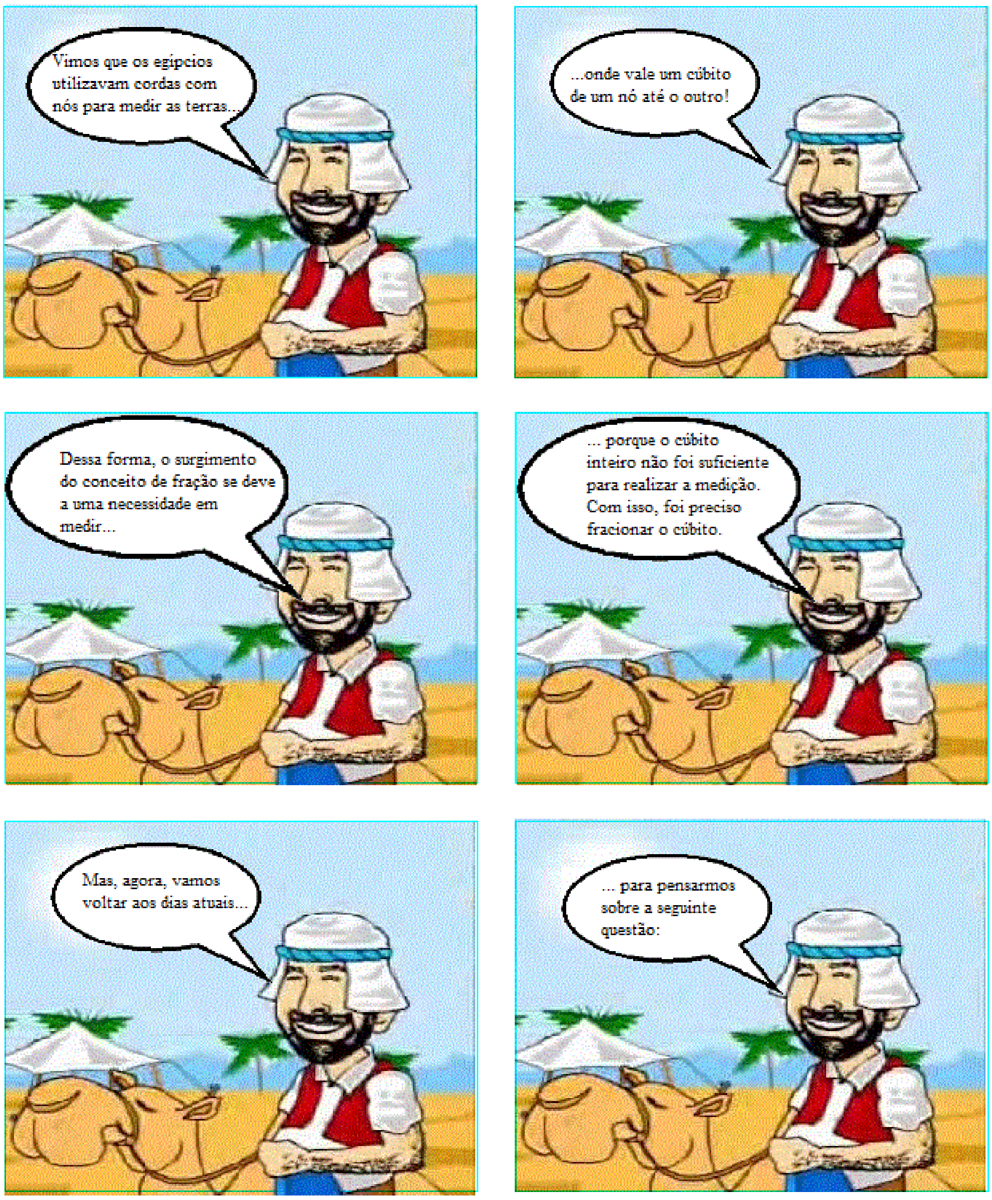
- **Vocês se depararam com o mesmo problema ao medirem a sala de aula, onde o cúbito não foi suficiente para medir? Como podemos ajudar os agrimensores a medir as terras?**

Com isso, subentende-se que os alunos indicarão que é necessário fracionar o cúbito, pois isso terá sido discutido na tarefa de aprendizagem anterior.

Após essa discussão será dada continuidade a leitura da história em quadrinho, confirmando que na época, foi necessário fracionar o cúbito, sendo este o motivo para o surgimento das frações. A aula terminará levando os alunos a compreenderem que o surgimento das frações se deve a uma necessidade de medir, ou seja, a unidade de medida padrão da época, que era cúbito, não foi suficiente para fazer as medições, sendo necessário subdividi-lo.

Portanto, essa aula tem como objetivo compreender o processo histórico do conceito de fração, surgindo devido a uma necessidade humana em medir.

AÇÃO 2 – Aula 6



Fonte: elaborado pela autora

- **Por que hoje não mais utilizamos o cúbito como unidade de medida? Discutam, em grupo, sobre isso.**

Fonte: elaborado pela autora

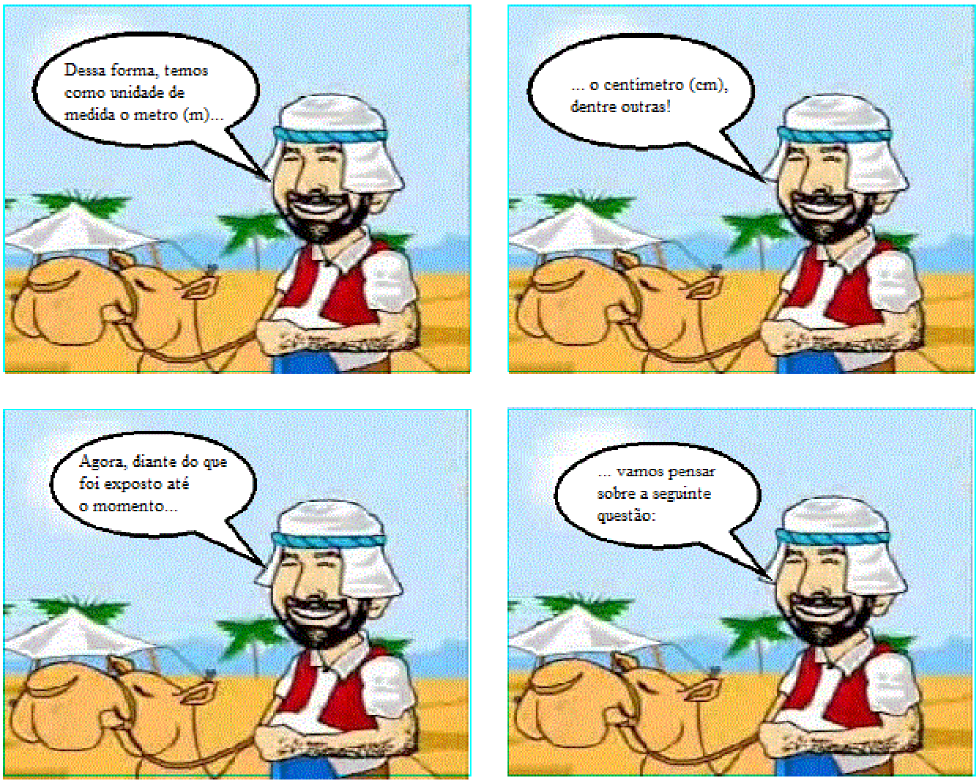
Fonte: elaborado pela autora

- **Qual é a diferença entre os comprimentos?**

Fonte: elaborado pela autora

Assim, compreendemos que o valor cúbito varia, pois nem sempre a medida do cotovelo até o dedo médio de uma pessoa é igual ao de outra. Assim, houve a necessidade de deixar de lado a corda e o cúbito para criar um outro instrumento de medida e uma outra unidade de medida de comum a acordo com todas as pessoas!

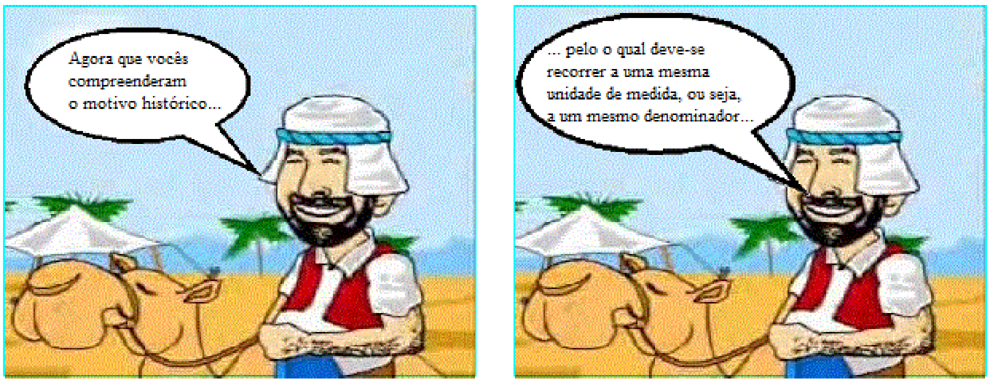
Fonte: continua



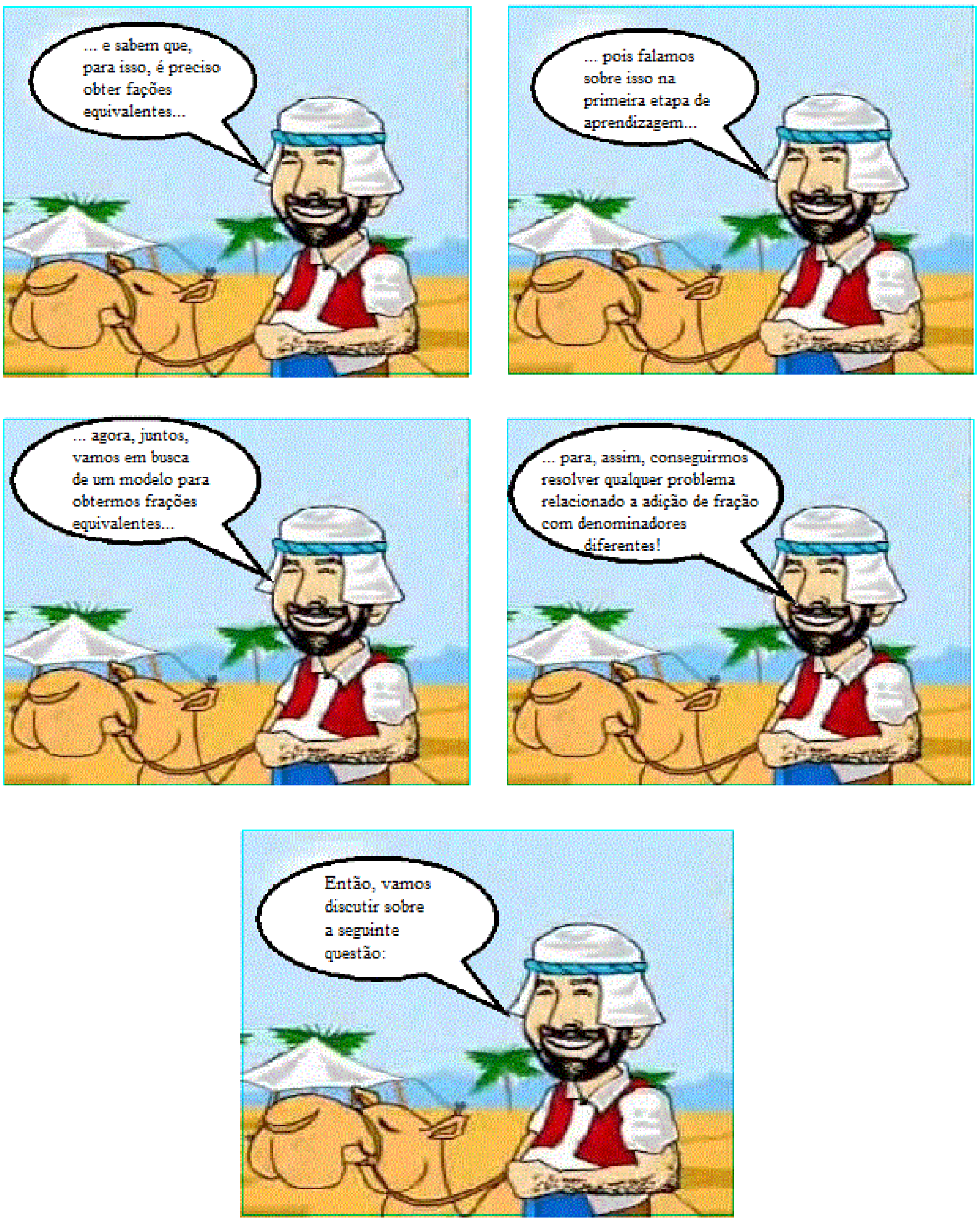
Fonte: elaborado pela autora

- **Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes? Discuta sobre isso.**

- **Vamos pensar nas frações da herança $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$. De acordo com o que foi discutido até o momento, porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum?**



Fonte: continua



Fonte: elaborado pela autora

Vimos que as frações surgiram devido a uma necessidade humana, sendo a necessidade em medir. Mas, o que é medir?

Fonte: continua

Fonte: elaborado pela autora.

Chamaremos o comprimento menor de AB e o comprimento maior de CD. Agora, coloque AB acima de CD de modo que os dois extremos coincidam. Como podemos obter a medida de AB em relação a CD?

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

Reescreva no quadro abaixo as frações

Fonte: elaborado pela autora

Fonte: elaborado pela autora

- **Ao analisar as subdivisões realizadas em CD (barbante) e a reta numérica que construíram, o que vocês compreenderam sobre o conceito de fração?**
- **Sobre as frações que obtiveram ao subdividir CD, conseguem perceber alguma semelhança, diferença, padrão? Qual?**

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa tem como objetivo geral introduzir o conceito de fração a partir da comparação entre duas grandezas, sendo a grandeza de comprimento, para em seguida obter um modelo gráfico e literal da relação geral frações equivalentes.

Para isso, como objetivo específico, os alunos devem se apropriar, a partir da história do surgimento do conceito de fração, do motivo pelo qual é necessário submeter-se a um denominador comum quando se quer realizar a operação de adição com denominadores diferentes.

Diante disso, deve ser realizada uma revisão da aula anterior mencionando que as frações surgiram devido a uma necessidade em medir, cuja unidade de medida existente na época, o cúbito, não foi suficiente para fazer a medição, precisando subdividi-lo. Em seguida, será lançada a seguinte questão:

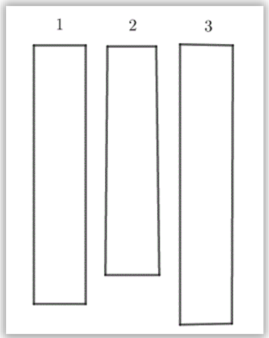
- **Por que hoje não mais utilizamos o cúbito como unidade de medida?**

Assim, deve haver um momento para que os grupos possam discutir sobre.

Após as discussões, deve ser explicado o motivo de não se utilizar o cúbito. Para isso, os alunos precisam comparar os comprimentos que foram utilizados na aula anterior para medir a sala de aula, colocando-os um ao lado do outro.

A figura 8 traz uma ilustração, como exemplo, mostrando uma possível comparação entre os comprimentos:

Figura 8 – Comparação entre os comprimentos



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Dessa forma, pergunta-se:

- **Qual é a diferença entre os comprimentos utilizados para medir a sala de aula?**

Com isso, os alunos devem perceber que estes não são iguais porque o valor do cúbito varia, ou seja, nem sempre a medida do cotovelo até o dedo médio de uma pessoa é igual ao de outra. Portanto, para que os comprimentos sejam iguais

> [...] se faz necessária a opção, em comum acordo, por uma mesma unidade de medida. Nesse momento, o professor traduz a necessidade histórica de que as pessoas, no mundo inteiro, também fizeram um acordo sobre a adoção de algumas medidas, chamadas simplesmente de medidas ou unidades de medida (ROSA, 2012, p. 185).

Sendo assim, para medir comprimentos, as pessoas adotaram unidades de medida padrão, como o metro (m) e o centímetro (cm) (ROSA, 2012).

Em seguida os alunos devem ser questionados:

- **Vimos que o valor do cúbito varia e, sendo assim, houve a necessidade de submeter a uma mesma unidade de medida. Como podemos relacionar esse acontecimento histórico com o conceito de adição de fração com denominadores diferentes?**

Portanto, por meio da comparação entre os comprimentos e a necessidade histórica de uma mesma unidade de medida, pretende-se que os alunos, através de um diálogo, percebam, segundo Rosa (2012, p. 185), com relação aos números racionais, “[...] que só se realiza as operações com os números obtidos de medidas com a mesma unidade [...]”. Com isso, compreenderão por que é necessário remeter-se a um denominador comum, ou seja, recorrer a uma mesma unidade de medida (ROSA, 2012).

Em seguida, será recordada as frações da herança $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, perguntando:

- **De acordo com o que foi discutido até o momento, explique porque é necessário submeter as frações da herança a um denominador comum?**

Dessa forma, os alunos devem compreender, por meio de uma discussão, que se tomarmos, por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ significa que, segundo Rosa (2012, p. 185), “[...] em um caso, a unidade foi dividida em três partes e se tomou uma delas e, no outro, em duas partes e também se tomou uma delas”. O mesmo vale para a fração $\frac{1}{9}$. Diante disso, conclui-se que “é evidente que são diferentes ‘medidas’ e, portanto, não se pode somar. Para somá-las há que levá-las a uma mesma unidade medida – denominador comum” (TALIZINA[1], 1987, p. 52, apud ROSA, 2012, p. 185).

Tendo se apropriado do motivo histórico pelo o qual deve-se recorrer a uma mesma unidade de medida, ou seja, a um mesmo denominador, e sabendo que, para isso, é necessário obter frações equivalentes, pois foi abordado na primeira ação de aprendizagem, agora, os

---

1 TALIZINA, N. F. **La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares**. Moscu: Editorial Progresso, 1987.

alunos devem ir em busca de um modelo de como obter frações equivalentes para realizar a operação de adição quando os denominadores não forem iguais.

Para isso, a seguinte pergunta deve ser feita aos alunos:

- **Vimos que as frações surgiram devido a uma necessidade humana, sendo a necessidade em medir. Mas, o que é medir?**

Essa pergunta tem como objetivo introduzir o conceito de fração, e criar uma base para desenvolver um modelo gráfico e literal para obter frações equivalentes.

Diante disso, será promovida uma discussão entre a turma, levando-os a perceber que medir, segundo o nosso referencial teórico Caraça (2002, p. 29) “[...] consiste em comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes etc.”

Dessa forma, serão entregues, a cada grupo, dois barbantes, um com 40 (quarenta) centímetros e o outro com 5 (cinco) centímetros, tal como mostra a figura 9:

Figura 9 – Barbantes

Fonte: elaborado pela autora.

Sendo assim, não será mencionado o comprimento dos barbantes, mas os alunos devem obter uma fração que representa a medida do comprimento menor em relação ao maior.

Após a entrega dos barbantes será dito aos alunos:

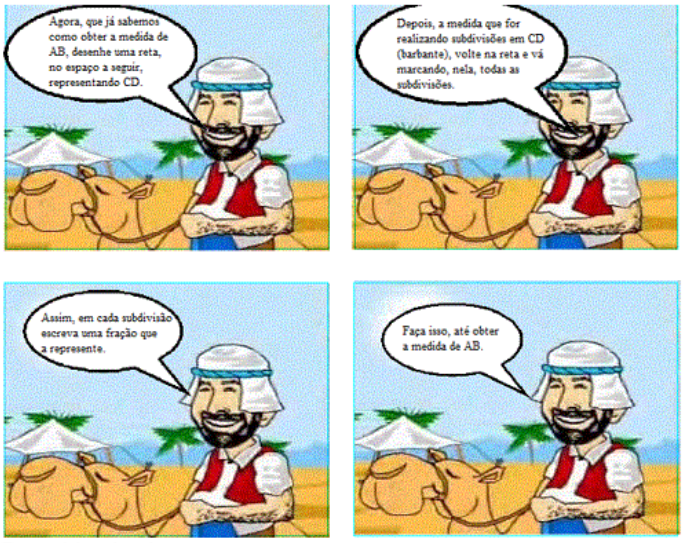
- **Chamaremos o comprimento menor de AB e o comprimento maior de CD. Agora, coloque AB acima de CD de modo que os dois extremos coincidam. Como podemos obter a medida de AB em relação a CD?**

Essa tarefa de aprendizagem consiste em tomar CD como unidade de medida para obter qual é o tamanho de AB, ou seja, por meio de um diálogo e reflexão, os alunos devem perceber para identificar a mediada de AB, é necessário obter um número de vezes que AB cabe em CD. Assim, será possível obter uma fração que representa a medida de AB em relação a CD e, para isso, segundo o nosso referencial teórico, Caraça (2002), devem ser realizadas subdivisões em CD até que coincida com AB.

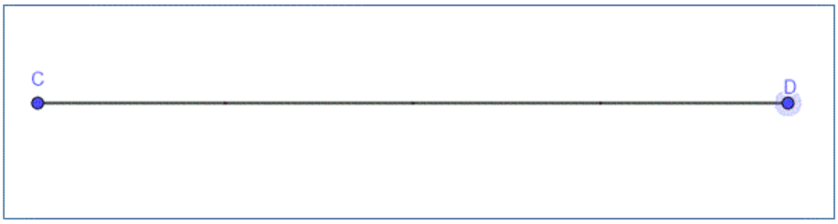
Sabendo que é necessário realizar subdivisões em CD para obter a medida de AB, os alunos devem registrar, na atividade impressa, todas as subdivisões. Dessa forma, primeiramente será pedido aos alunos que façam uma representação, na atividade impressa, do comprimento CD.

A figura 10 ilustra uma possível representação:

Figura 10 – Representação de CD na atividade impressa



Fonte: elaborado pela autora

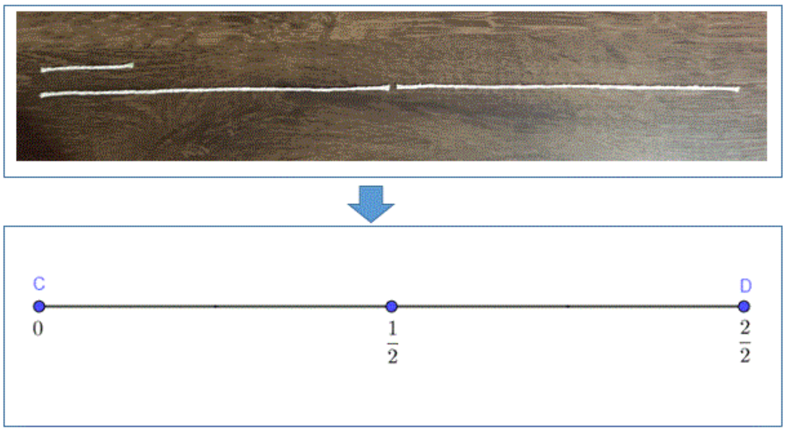


Fonte: elaborado pela autora

Dessa forma, ao passo que forem realizando as subdivisões em CD (barbante) para obter a medida de AB, devem voltar na atividade impressa e marcar em CD todas as subdivisões escrevendo uma fração que a represente. No final, será obtido o valor de AB.

A figura 11 ilustra essa ação:

Figura 11 – Subdivisões em CD (barbante)

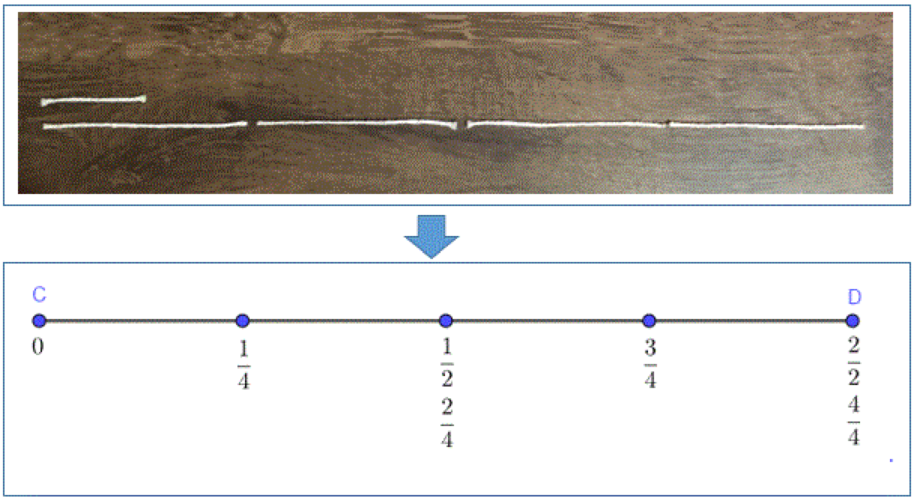


Fonte: elaborado pela autora

De acordo com a figura 11 e com o nosso referencial teórico Caraça (2002), é necessário realizar outra subdivisão em CD, já que queremos obter a medida de AB.

A figura 12 ilustra uma segunda subdivisão:

Figura 12 – Subdivisões em CD (barbante)

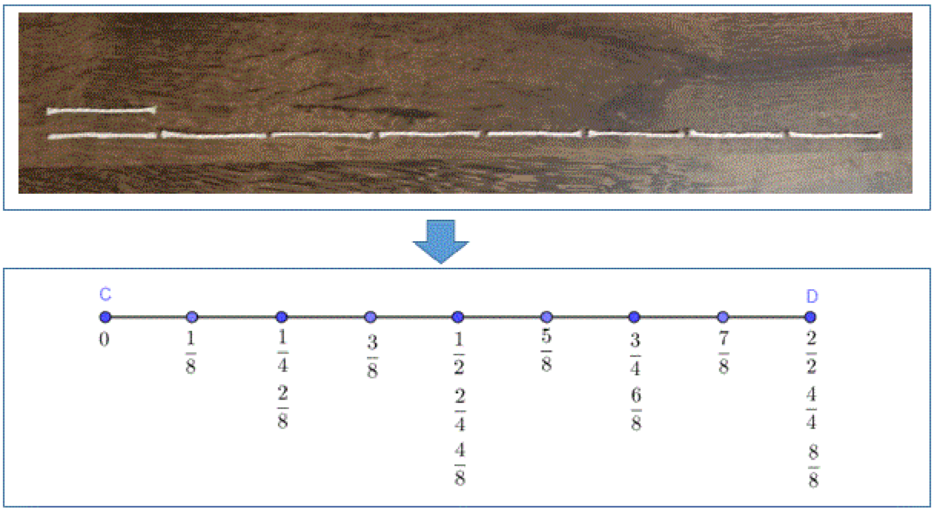


Fonte: elaborado pela autora

Novamente, de acordo com a figura 12 e com o nosso referencial teórico Caraça (2002), é necessário realizar outra subdivisão em CD, já que queremos obter a medida de AB.

A figura 13 ilustra uma terceira subdivisão:

Figura 13 – Subdivisões em CD (barbante)



Fonte: elaborado pela autora

De acordo com a figura 13, temos que a medida de AB = $\frac{1}{8}$ de CD.

Após, encontrarem a medida de AB, os alunos devem escrever na atividade impressa, o que compreenderam sobre o conceito de fração, tal como mostra a figura 14:

Figura 14 – O que você compreende sobre o conceito de fração?

Fonte: elaborado pela autora

____

____

____

____

____

Fonte: elaborado pela autora

Em seguida, deverão reescrever, na atividade impressa, as frações que obtiveram ao subdividir CD, conforme ilustra a figura 15:

Figura 15 – Reescrever no quadro as frações obtidas ao subdividir CD

$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
$\frac{1}{4},\frac{2}{8}$	$\frac{3}{4},\frac{6}{8}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$
$\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{4}{8}$	$\frac{2}{2},\frac{4}{4},\frac{8}{8}$

Fonte: elaborado pela autora

Em seguida, os resultados serão discutidos entre a turma. Assim, será perguntado aos alunos:

- **Ao analisar as subdivisões realizadas em CD (barbante), tomando o cordão maior como unidade de medida do cordão menor, o que vocês compreendem sobre o conceito de fração?**

Por meio de uma discussão e reflexão os alunos devem compreender que o conceito de fração é obtido ao se comparar duas grandezas, sendo neste caso a grandeza de comprimento. Dessa forma, podemos considerar que a fração é resultado da comparação entre dois comprimentos quando um deles é tomando como unidade de medida do outro. Assim, neste caso, CD não foi suficiente para obter a medida de AB, sendo necessário subdividi-lo.

Posteriormente, será realizada uma outra pergunta. Esta tem como objetivo construir o modelo da relação geral do objeto de estudo, ou seja, como obter frações equivalentes:

- **Sobre as frações que obtiveram ao subdividir CD, conseguem perceber alguma semelhança, diferença, padrão? Qual?**

Sendo assim, por meio de uma análise e reflexão, os alunos devem compreender que quanto mais se divide CD, mais frações equivalentes as anteriores podem ser estabelecidas. Assim, os estudantes devem identificar, e se apropriar, que as frações equivalentes podem ser obtidas ao multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número. Por exemplo, ao analisarem as frações $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$, devem perceber que, para obter a fração equivalente a $\frac{1}{2}$, podem multiplicar o seu denominador e numerador pelo número 2 (dois), encontrando a fração $\frac{2}{4}$. Ou, também, podem multiplicar os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número 4 (quatro).

Além disso, utilizando a operação de divisão, é possível encontrar frações equivalentes, por exemplo, ao dividir os denominadores e numeradores das frações por um mesmo número 2 (dois). Ou, se dividirmos, o numerador e o denominador da fração $\frac{4}{8}$ por um mesmo número 4 (quatro) obtêm-se a fração $\frac{1}{2}$, que é sua fração equivalente. Portanto, de forma literal, os alunos devem compreender que, para encontrar frações equivalentes, basta multiplicar ou dividir os denominadores e numeradores de uma fração pelo o mesmo número.

AÇÃO 3 – Aula 7

Fonte: elaborado pela autora.

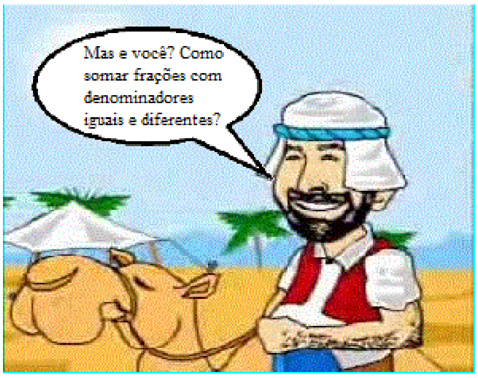
Eu e o meu amigo Bagdáli, após resolvermos o problema dos camelos, fomos para Bagdá. Ao chegarmos na cidade, fomos à uma pizzaria e pedimos duas pizzas. Pedimos uma pizza de sabor bacon, que estava dividida em 2 partes iguais e a outra com sabor calabresa, que estava dividida em 6 pedaços iguais. A pizza de bacon eu comi a metade e a pizza de calabresa eu também comi a metade.

Desenhe a seguir as duas pizzas, representando a quantidade que Beremiz comeu.

PIZZA DE BACON | **PIZZA DE CALABRESA**

Quando fomos embora da pizzaria, eu perguntei ao meu amigo Bagdáli qual é a fração que representa a quantos pedaços iguais de pizza que eu comi. Bagdáli disse que essa fração é igual a $\frac{4}{8}$. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?

Depois disso, eu perguntei para Bagdáli qual é a fração que representa a quantidade de pedaços de pizza de calabresa eu e ele comemos juntos. Como se sabe eu comi 3 pedaços, já o Bagdáli comeu todo o restante. Diante disso, Bagdáli afirmou que comemos juntos $\frac{6}{12}$ da pizza. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?



Fonte: elaborado pela autora.

O que você compreende sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes?

DENOMINADORES IGUAIS

DENOMINADORES DIFERENTES

Fonte: elaborado pela autora

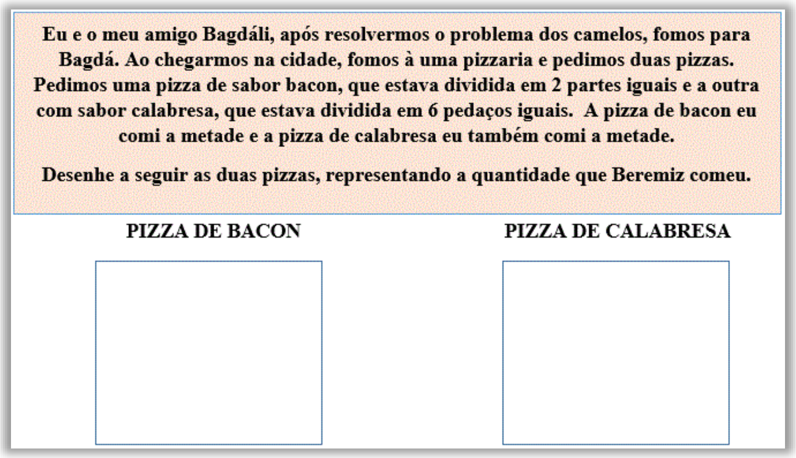
ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa consiste em introduzir mudanças na relação geral, provocando uma descaracterização no objeto, podendo vir a causar consequências (FREITAS, 2016). Assim, os alunos, percebendo essa irregularidade, reforçam a base genética do objeto e, segundo o nosso referencial teórico Freitas (2016, p. 413) “[...] identificam seu vínculo com relações particulares que interferem na forma pela qual se apresenta na realidade e compreendem que está sujeita a um processo de transformação”.

Diante disso, a primeira e única aula desta ação consiste na apresentação de uma situação particular em que se pode encontrar a adição de fração com denominadores iguais e diferentes, que é ao se comer pizza. Nesse sentido, tarefas de aprendizagem serão propostas objetivando que verifiquem situações onde os denominadores das frações foram somados, cujas situações alterarão o resultado e ocasionarão uma descaracterização do objeto. Sendo assim, para se ter o resultado correto, devem perceber que não se pode somar os denominadores das frações, mas recorrer a frações equivalentes ou conservá-los, quando os denominadores forem iguais.

Assim, a tarefa de aprendizagem inicia com Beremiz Samir afirmando que, após a resolver o “Problema dos Camelos”, ele e seu amigo Bagdáli foram a uma pizzaria e pediram duas pizzas, uma de sabor bacon e, a outra sabor, calabresa. A pizza de bacon estava dividida em duas partes iguais e a de calabresa em seis. Sendo assim, a situação de aprendizagem diz que Beremiz Samir comeu a metade da pizza de bacon e a metade da pizza de calabresa. Diante disso, os alunos precisarão representar geometricamente essa situação. A figura 16 ilustra o que se pede nesta primeira tarefa de aprendizagem:

Figura 16 – A primeira tarefa da terceira ação de aprendizagem segundo Davydov (1988)


Eu e o meu amigo Bagdáli, após resolvermos o problema dos camelos, fomos para Bagdá. Ao chegarmos na cidade, fomos à uma pizzaria e pedimos duas pizzas. Pedimos uma pizza de sabor bacon, que estava dividida em 2 partes iguais e a outra com sabor calabresa, que estava dividida em 6 pedaços iguais. A pizza de bacon eu comi a metade e a pizza de calabresa eu também comi a metade.

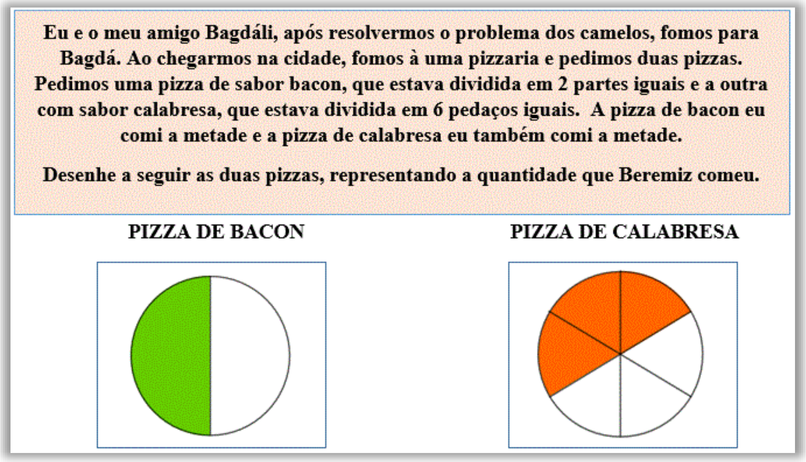
Desenhe a seguir as duas pizzas, representando a quantidade que Beremiz comeu.

PIZZA DE BACON **PIZZA DE CALABRESA**

Fonte: elaborado pela autora

A figura 17 ilustra uma possível representação geométrica para a quantidade de pedaços de pizza que Beremiz Samir comeu.

Figura 17 – Ilustração da quantidade de pedaços de pizza comidos por Beremiz Samir



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Após a representação geométrica, os alunos devem discutir, em grupo, e responder a seguinte questão:

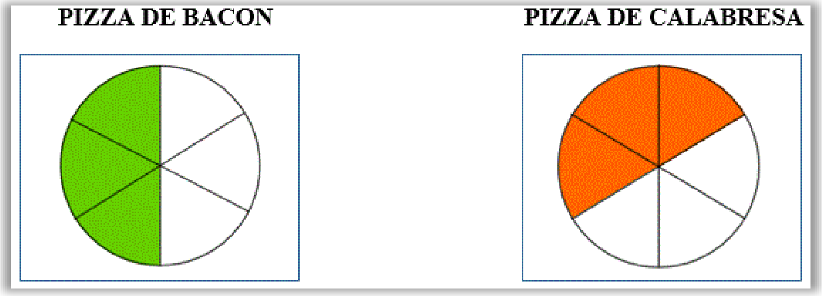
- **Quando fomos embora da pizzaria, eu perguntei ao meu amigo Bagdáli qual é a fração que representa a quantos pedaços iguais de pizza que eu comi. Bagdáli disse que essa fração é igual a $\frac{4}{8}$. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?**

Para sabermos se a fração $\frac{4}{8}$ está correta, basta somarmos as frações que correspondem a quantidade de pizza que Beremiz Samir comeu, ou seja, somar $\frac{1}{2}+\frac{3}{6}$. Como são frações com denominadores diferentes é necessário estabelecer um denominador comum. Assim, podemos utilizar a modelação literal estabelecida na ação de aprendizagem anterior, multiplicando o denominador e o numerador da fração $\frac{1}{2}$ por um mesmo número 3 (três).

$$\frac{1x3}{2x3}=\frac{3}{6}$$

Diante disso, temos que a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ é a fração $\frac{3}{6}$. A figura 18 traz uma ilustração da representação geométrica dessa situação:

Figura 18 – Representação geométrica das frações ao reduzi-las a um mesmo denominador



Elaborado pela autora – Software GeoGebra

Agora podemos realizar a adição das frações que representam a quantidade de pizza comida por Beremiz Samir:

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Diante desse resultado, é possível perceber que Beremiz Samir comeu uma pizza inteira de 6 (seis) pedaços de mesmo tamanho, sendo 3 (três) fatias de pizza de Bacon e 3 (três) fatias de pizza de Calabresa. Portanto, isso confirma que Bagdáli estava errado, pois não considerou que as pizzas possuem quantidades de pedaços diferentes, cuja situação acarretaria na determinação de frações equivalentes, ou seja, recorrer a uma mesma quantidade de pedaços em ambas as pizzas (denominadores iguais) para que possa realizar a operação de adição e, por fim, responder quantos pedaços iguais de pizza foram comidos por Beremiz Samir.

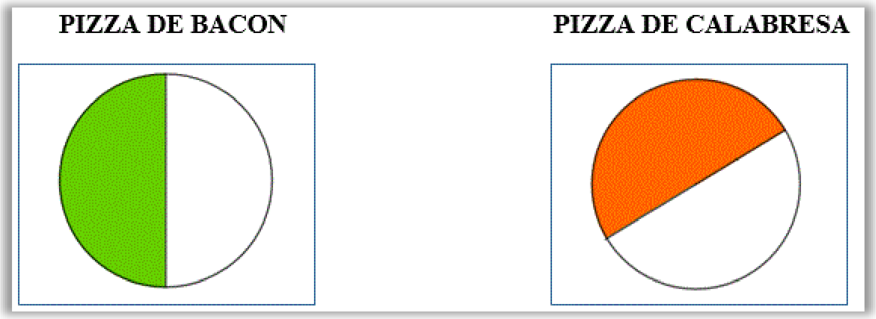
Dessa forma, ao invés disso, somou os denominadores das frações, causando consequências, já que não se pode somá-los, pois estes representam a unidade, ou seja, a pizza inteira. Assim, cada pizza não possui 8 (oito) pedaços iguais, como indica a fração $\frac{4}{8}$, mas após a redução a um mesmo denominador (mesma quantidade de pedaços em cada pizza) é possível perceber que estas possuem na verdade, 6 (seis) pedaços iguais de pizza.

Uma outra maneira de pensar esse problema é reduzindo a fração $\frac{3}{6}$ para $\frac{1}{2}$ dividindo o denominador e o numerador por 3 (três):

$$\frac{3 \div 3}{6 \div 3}=\frac{1}{2}$$

Realizando a operação de adição temos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$. Logo, temos que Beremiz Samir comeu uma pizza inteira, dividida em dois pedaços iguais, sendo a metade de bacon e a metade de calabresa, tal como ilustra a figura 19:

Figura 19 – Representação geométrica das frações ao reduzi-las a um mesmo denominador



Fonte: elaborado pela autora – Software GeoGebra

Após resolverem essa tarefa de aprendizagem, uma outra será proposta:

- **Depois disso, eu perguntei para Bagdáli qual é a fração que representa a quantidade de pedaços de pizza de calabresa eu e ele comemos juntos. Como se sabe eu comi a metade, já o Bagdáli comeu todo o restante. Diante disso, Bagdáli afirmou que comemos juntos $\frac{6}{12}$ da pizza. O que você acha dessa resposta de Bagdáli? O que será que Bagdáli fez? Será que essa resposta está correta? Como você chegou nessa conclusão?**

Para resolvermos a essa questão basta somarmos a quantidade de pizza de calabresa comida por Beremiz Samir, mais a quantidade de pizza comida por Bagdáli. Como se sabe, a pizza está dividida em 6 (seis) partes iguais, onde Beremiz Samir comeu a metade. Logo temos que a fração $\frac{3}{6}$ corresponde a essa situação. Como a pizza está dividida em 6 (seis) partes iguais e Beremiz Samir comeu a metade, temos que o restante equivale a quantidade comida por Bagdáli que é representada pela fração $\frac{3}{6}$.

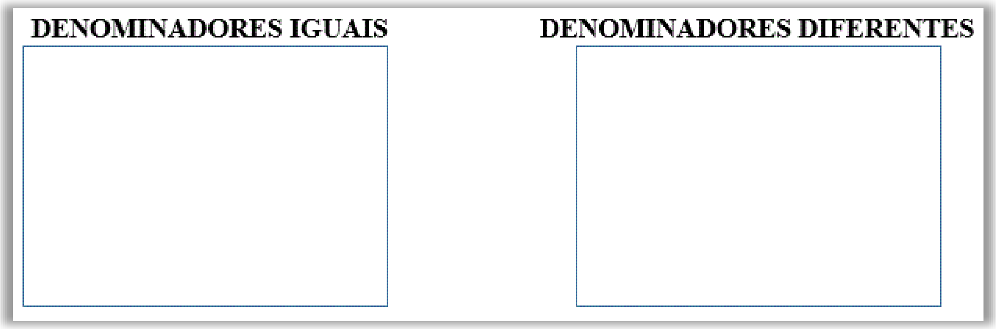
Diante disso, como queremos descobrir quantos pedaços de pizza os dois comeram juntos, basta somarmos as frações:

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=\frac{6}{6}=1$$

Esse resultado quer dizer que ambos comeram juntos 6 (seis) pedaços de pizza de um total de 6 (seis), ou seja, comeram juntos a pizza toda. Isso implica que o resultado apontado por Bagdáli não está correto, pois somou os denominadores das frações e, como é possível notar na representação geométrica, não há 12 (doze) pedaços de pizza de calabresa.

Após responderem essa tarefa de aprendizagem, os alunos devem escrever o que compreendem sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes, tal como mostra a figura 20:

Figura 20 – O que você compreende sobre a adição de fração com denominadores iguais e diferentes?



Fonte: elaborado pela autora

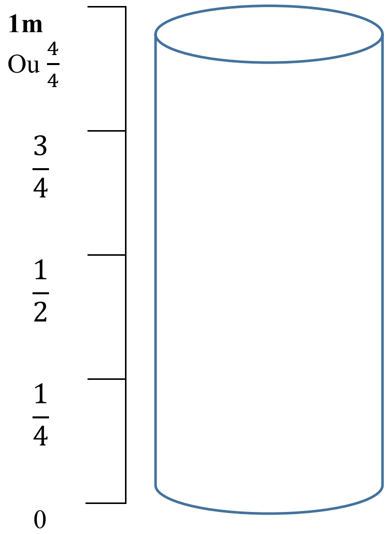
Em seguida, os resultados devem ser discutidos entre toda a turma.

Assim sendo, espera-se que, por meio de situações que alteram o resultado, causando mudanças na relação geral e provocando uma descaracterização no objeto, possam contribuir para que os alunos se apropriem do motivo pelo qual, na adição de fração, deve-se conservar o denominador quando estes forem iguais e porque deve-se recorrer a frações equivalentes quando estes forem diferentes.

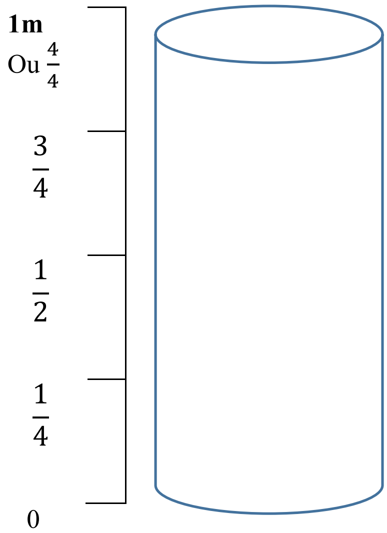
Outro ponto a destacar é que sabemos o “Problema dos Camelos” não menciona que Beremiz Samir e Bagdáli foram a uma pizzaria após a solução do problema. Dessa forma, criamos as tarefas de aprendizagem apresentadas anteriormente a fim de ilustrar uma situação particular que envolvesse o objeto de estudo.

AÇÃO 4 – Aula 8

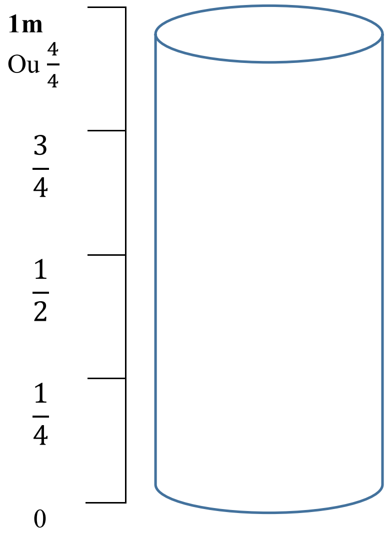
Atividade 1



1.No caso ao lado até quantos metros o nível da água do Rio Nilo pode subir? Qual é a fração que representa esse caso? Pinte no desenho ao lado a representação dessa situação.

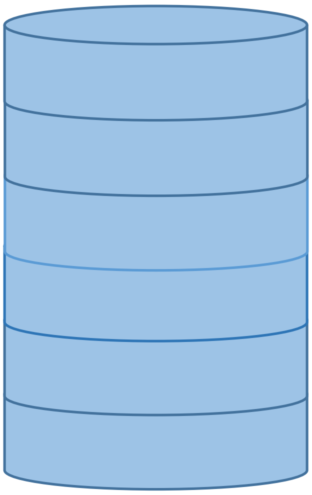


2.Qual é a fração que representa a metade do nível da água? Pinte no desenho ao lado a representação dessa situação. Existe uma outra fração que pode representar a fração que ilustra a metade do nível da água? Observe o padrão das frações na reta numérica ao lado e tente explicar.

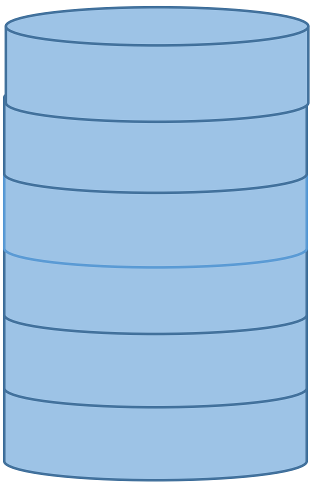


3. De quanto em quanto o nível da água está subindo? Escreva a fração que representa essa situação. Por que você acha que essa fração representa a quantidade de água que está subindo? Explique.

A seguir temos uma outra representação do nível de água do Rio Nilo. Faça uma reta numérica ao lado das figuras a seguir representando o nível de água do Rio Nilo sabendo que o máximo que suas águas podem subir é 1 metro.

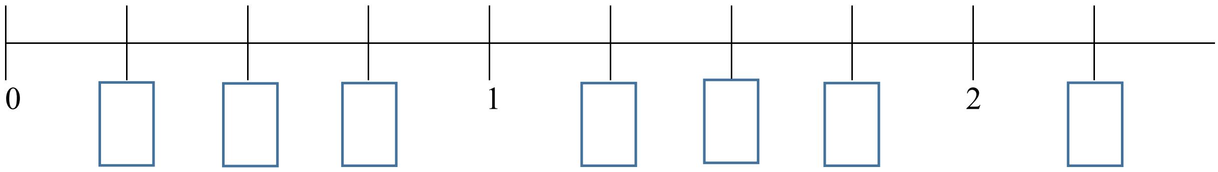


4. Qual é a fração que representa a metade do nível da água? Existe uma outra forma de representar essa fração? Por que essa fração pode ser escrita dessa forma? Pinte o desenho ao lado representando a metade no nível da água.

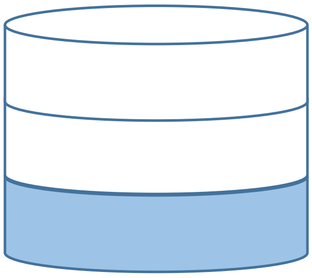


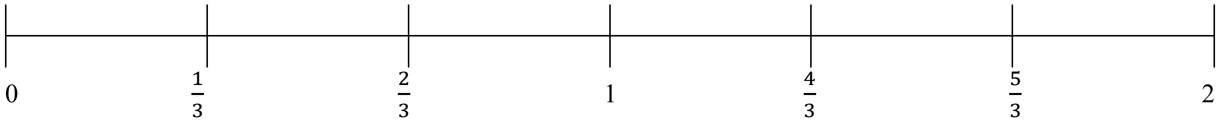
5. De quanto em quanto o nível da água está subindo? Escreva a fração que representa essa situação. Por que você acha que essa fração representa a quantidade de água que está subindo? Explique.

6. Sejam as subdivisões a seguir, escreva as respectivas frações.



7. Marque na subdivisão a fração que representa a figura a seguir:

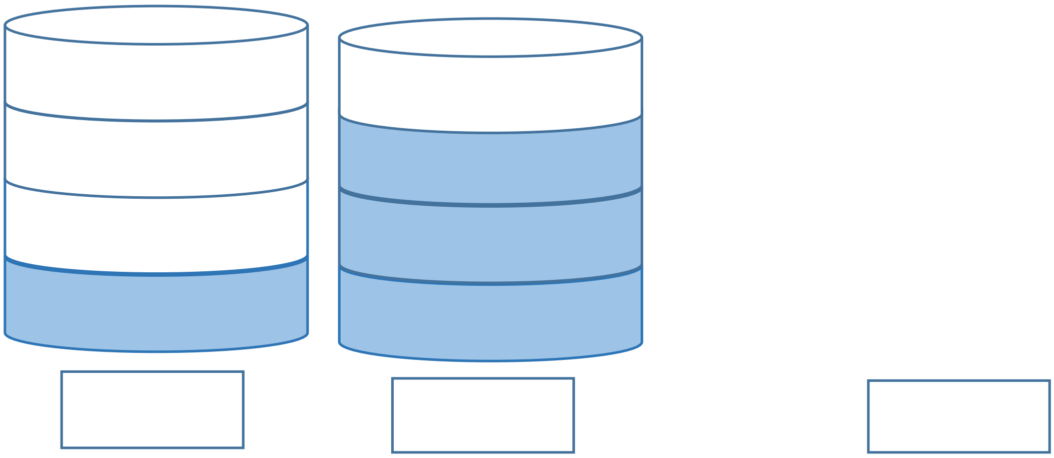




8.O que você conseguiu compreender sobre as frações nessa subdivisão?

9.Observe as seguintes imagens. A primeira ilustração mostra o nível das águas do Rio Nilo no primeiro dia da inundação e a segunda ilustração mostra o nível das águas do Rio Nilo no terceiro dia. Sabendo que o nível das águas está subindo a mesma quantidade a cada dia, represente em forma de fração cada situação e desenhe como ficaria o nível das águas do Rio Nilo no quarto dia.

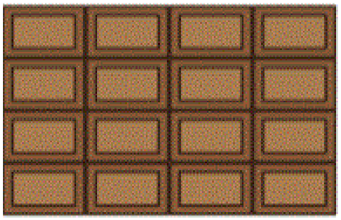
ILUSTRAÇÃO 1 **ILUSTRAÇÃO 2** **ILUSTRAÇÃO 3**



Como comprovar matematicamente que a ilustração 3, que você desenhou, está correta?

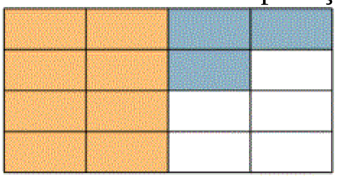
Atividade 2

(RIPOLL et al, 2017) Uma barra de chocolate é vendida com as marcações mostradas na figura abaixo.



Fonte: Ripoll et al, 2017

Alice comeu a metade dessa barra de chocolate (em bege), Miguel quebrou o restante da barra em pedaços, seguindo as marcações e comeu 3 desses pedaços (em azul).



Fonte: Ripoll et al, 2017

Se considerarmos a barra de chocolate como a unidade, indicamos que as quantidades comidas são: $\frac{1}{2}$ por Alice e $\frac{3}{16}$por Miguel. Os pedaços da barra (quebrados por Miguel de acordo com as marcações na barra) correspondem a uma subdivisão dessa unidade. Observe que ambas as frações da barra de chocolate comidas por Alice e Miguel podem ser obtidas a partir dessa subdivisão: Miguel comeu 3 pedaços e a quantidade comida por Alice corresponde a 8 pedaços.

a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu. $\frac{1}{2} = \frac{\ }{16}$

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

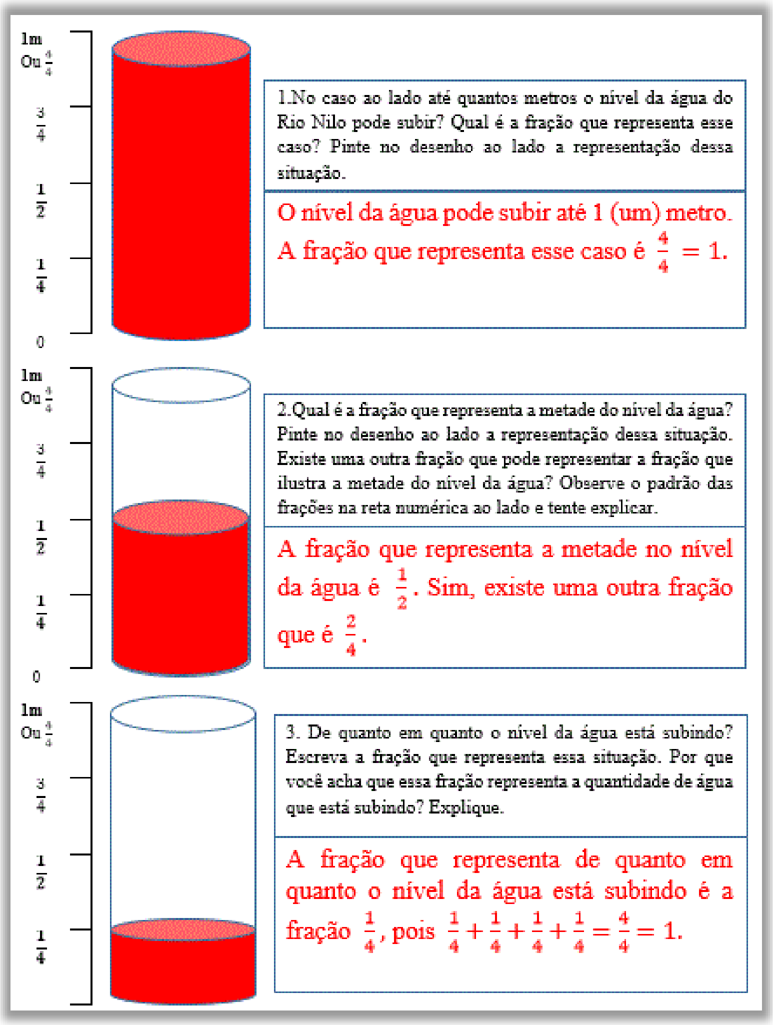
d) Que fração da barra de chocolate não foi comida

ORIENTAÇÕES:

A atividade 1, aborda situações de aprendizagem sobre as cheias do rio Nilo. Sendo assim serão trabalhados conteúdos, tais como: representação geométrica de fração, adição de fração com denominadores iguais e frações equivalentes.

Dessa forma, a seguir, a figura 21 ilustra as três primeiras questões, bem como as respostas esperadas para estas:

Figura 21 – Questões 1, 2 e 3 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

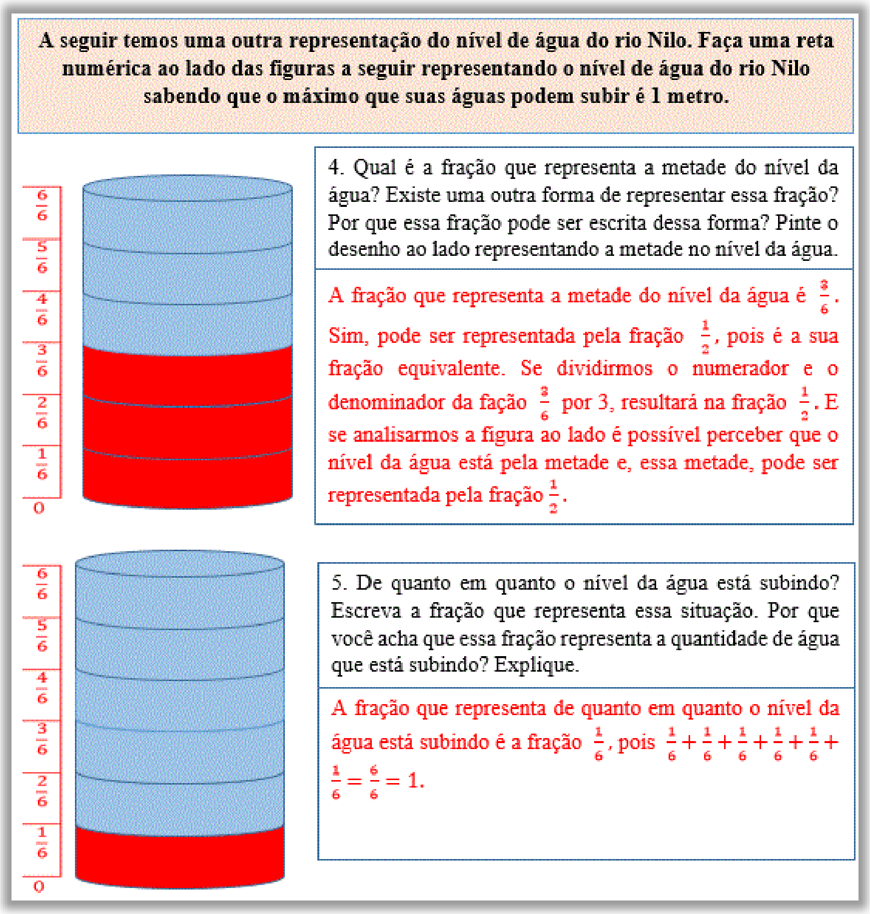
Portanto, a questão 1, consiste em pintar no desenho ao lado qual é a fração que corresponde até quantos metros o nível da água do rio Nilo pode subir. Sendo assim, esse valor corresponde a 1 (um) metro, cuja resposta indica que deve-se pintar todo desenho. Essa questão tem como objetivo que os alunos percebam, através da pintura do desenho, que a fração $\frac{4}{4}$ equivale a 1 (um), ou seja, que representa o todo.

A questão 2 se resume em determinar a fração que representa a metade do nível da água e pintar, no desenho ao lado, o seu valor correspondente. Além disso, devem indicar uma fração que representa a fração $\frac{1}{2}$, cuja resposta é a fração $\frac{2}{4}$. Diante disso, esta questão tem como propósito explorar o conceito de frações equivalentes.

Por fim, a questão 3, consiste em determinar a fração que corresponde de quanto em quanto o nível da água está subindo, cuja resposta é a fração $\frac{1}{4}$. Outro ponto a destacar é que devem comprovar que a fração $\frac{1}{4}$ é a resposta correta para essa pergunta. Sendo assim, podem realizar a seguinte operação de adição: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$. Como o nível da água subiu até 1 (um) metro, logo temos que a fração $\frac{1}{4}$ corresponde de quanto em quanto o nível da água do rio Nilo está subindo. Portanto, temos que o objetivo dessa terceira questão é explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais.

Prosseguindo, as atividades seguintes, bem como as suas respostas, podem ser vistas na figura 22:

Figura 22 – Questões 3 e 4 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

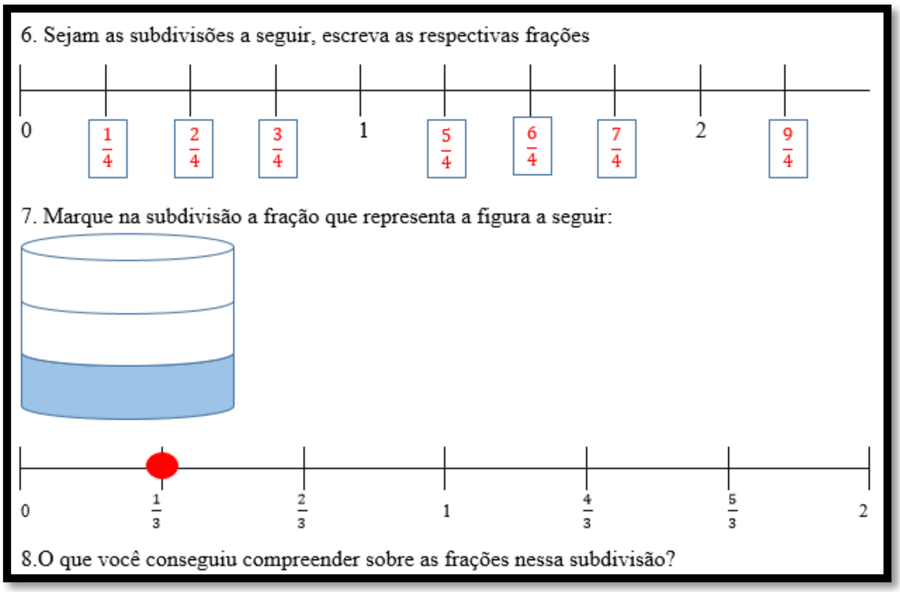
A questão 4, consiste em construir as subdivisões do desenho, e determinar a fração que representa a metade do nível da água, cuja resposta é a fração $\frac{3}{6}$. Em seguida os alunos devem pintar no desenho a parte em que corresponde a essa fração.

Uma outra forma de escrever a fração $\frac{3}{6}$, é obtendo a sua fração equivalente, dividindo o numerador e o denominador pelo número 3 (três), resultando em $\frac{1}{2}$. Portanto, a questão 4 tem como objetivo, explorar o conceito de fração equivalente.

A explicação da questão 5 é análoga a questão 3. Além disso, também tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais.

A seguir, são apresentadas as questões 6, 7 e 8. Além disso, as respostas esperadas para essas questões 6 e 7 também são ilustradas, tal como mostra a figura 23:

Figura 23 – Questões 6, 7 e 8

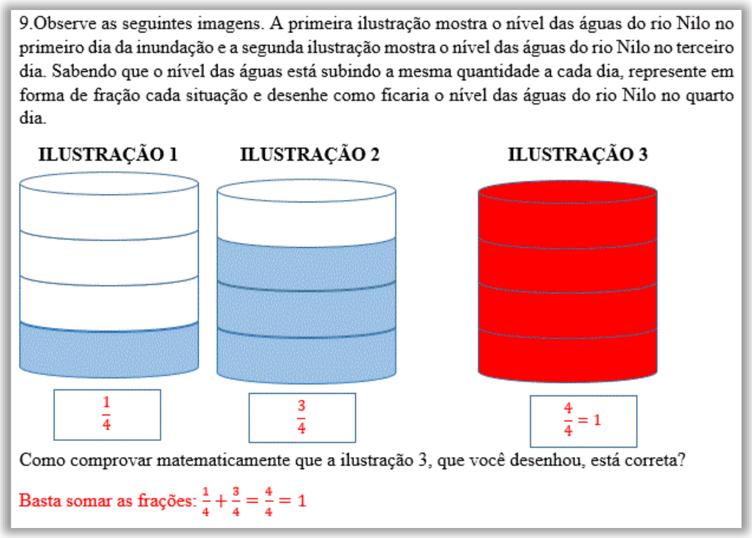


Fonte: elaborado pela autora

A questão 6, consiste em escrever qual é a fração que representa os pontos demarcados pelos retângulos azuis. Essa questão tem como objetivo reconhecer as frações nessa subdivisão, além de compreender que há frações onde os numeradores são maiores que os denominadores. A questão 7, baseia-se em visualizar a ilustração geométrica e reconhecer que esta pode ser representada pela fração $\frac{1}{3}$ na subdivisão. A questão 8, consiste em escrever a compreensão de fração nessa subdivisão.

Prosseguindo, a próxima questão, bem como a sua resposta esperada, é ilustrada na figura 24 a seguir:

Figura 24 – Questão 9 sobre as cheias do rio Nilo



Fonte: elaborado pela autora

A questão 9 consiste em identificar a fração que corresponde qual é o nível das águas no quarto dia, sabendo que este está aumentando com a mesma proporção. Dessa forma, como a ilustração 1 representa o primeiro dia, temos que a fração, que corresponde o aumento gradativo das águas, é $\frac{1}{4}$. Sendo assim, como queremos saber qual é a fração que corresponde ao nível das águas no quarto dia, basta analisar a ilustração 2, que representa o terceiro dia do nível das águas, cuja fração é $\frac{3}{4}$. Assim, se somamos as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$, o resultado é $\frac{4}{4}$, ou seja, no quarto dia as águas terão aumentado 1 (um) metro. Por fim, deverão representar geometricamente essa situação como mostra a ilustração 3. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores iguais e a representação geométrica e numérica de fração.

Um ponto a destacar é que as situações de aprendizagem envolvendo as cheias do rio Nilo são ilustrativas, ou seja, não significam que ocorreram da maneira como são descritas nas tarefas. Dessa forma, isso será mencionado pela pesquisadora e, posteriormente, trará essa ilustração para a realidade, mencionando porque acontecem as cheias dos rios e lagos.

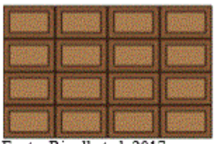
Sendo assim, as cheias ocorrem devido ao volume pluviométrico excessivo (as chuvas). Essa situação, em consonância com a retirada da cobertura vegetal natural (e.g., realização de atividades antropogênicas), ocasiona um desequilíbrio nos processos físicos, químicos e biológicos dos sistemas naturais, facilitando as enchentes (MARTEN; MINELLA, 2002).

Prosseguindo, a **atividade 2**, consiste em explorar situações relacionadas a uma barra de chocolate. Assim, as questões que serão expostas a seguir foram elaboradas por Ripoll et al (2017) e, as utilizamos, pois acreditamos que podem contribuir para a construção conceitual sobre fração "[...] e a conduzir os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático amparados por reflexão e por discussão [...] e a levá-los a estabelecer suas próprias conclusões sobre os assuntos tratados" (RIPOLL et al, 2017, p. 5).

Sendo assim, a seguir apresentaremos as questões sobre a barra de chocolate, bem como as suas respostas esperadas, tal como mostra a figura 25:

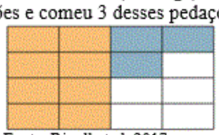
Figura 25 – Questões "a" e "b" sobre a barra de chocolate

1 (RIPOLL et al, 2017) Uma barra de chocolate é vendida com as marcações mostradas na figura abaixo.



Fonte: Ripoll et al, 2017.

Alice comeu a metade dessa barra de chocolate (em bege). Miguel quebrou o restante da barra em pedaços, seguindo as marcações e comeu 3 desses pedaços (em azul).



Fonte: Ripoll et al, 2017

Se considerarmos a barra de chocolate como a unidade, indicamos que as quantidades comidas são: $\frac{1}{2}$ por Alice e $\frac{3}{16}$ por Miguel. Os pedaços da barra (quebrados por Miguel de acordo com as marcações na barra) correspondem a uma subdivisão dessa unidade. Observe que ambas as frações da barra de chocolate comidas por Alice e Miguel podem ser obtidas a partir dessa subdivisão: Miguel comeu 3 pedaços e a quantidade comida por Alice corresponde a 8 pedaços.

a) Um pedaço corresponde a que fração da barra de chocolate?
A barra de chocolate possui, ao todo, 16 retângulos de chocolate. Assim, se tomarmos 1 pedaço da barra, teremos que a fração que corresponde a essa situação é a fração $\frac{1}{16}$.

b) Complete a parte em branco (numerador) para indicar a fração da barra de chocolate que Alice comeu

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{16}$$

Fonte: elaborado pela autora

A questão "a" consiste em responder qual é a fração que corresponde a um pedaço da barra de chocolate. Dessa forma, como a barra de chocolate possui 16 retângulos de chocolate temos que a fração que corresponde a essa situação é a fração $\frac{1}{16}$. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o significado da relação parte/todo.

Já a questão "b", é necessário identificar o numerador da fração, representando a quantidade da barra de chocolate que foi comida por Alice. Dessa forma, essa questão tem como objeto reconhecer $\frac{1}{2}$ é equivalente a fração $\frac{8}{16}$.

A seguir, na figura 26, serão apresentadas as questões "c" e "d", sobre a barra de chocolate, bem como as suas respostas esperadas.

Figura 26 – Questões “c” e “d” sobre a barra de chocolate

c) Que fração da barra de chocolate foi comida por Alice e por Miguel, juntos?

Alice comeu $\frac{1}{2}$ da barra de chocolate e Miguel comeu $\frac{3}{16}$. Para sabermos qual é a fração da barra de chocolate que foi comida por Alice e por Miguel, juntos, basta somarmos $\frac{1}{2}$ mais $\frac{3}{16}$: Como são denominadores diferentes, é necessário reduzi-los a um mesmo valor em comum. Para isso, basta analisarmos o desenho para perceber que a fração equivalente a $\frac{1}{2}$ é a fração $\frac{8}{16}$, ou multiplicar o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{2}$ pelo número 8: $\frac{1x8}{2x8} = \frac{8}{16}$. Assim, temos que, $\frac{8}{16} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$. Portanto, Alice e Miguel comeram, juntos, $\frac{11}{16}$ da barra de chocolate.

d) Que fração da barra de chocolate não foi comida?

A barra de chocolate, ao todo, pode ser representada pela fração $\frac{16}{16}$. Diante disso, para responder qual é a fração da barra de chocolate não foi comida, basta subtrair a fração que corresponde a quantidade da barra de chocolate comida por Alice e Migue, juntos, da fração que corresponde a quantidade total da barra de chocolate: $\frac{16}{16} - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$.

Fonte: elaborado pela autora

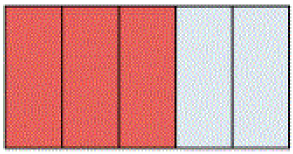
A questão “c” consiste em obter a fração que representa a quantidade da barra de chocolate que foi comida por Alice e Miguel, juntos, cuja resposta é a fração $\frac{11}{16}$. Assim, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, pois é necessário somar a fração $\frac{1}{2}$, que corresponde a quantidade da barra de chocolate comida por Alice, com a fração $\frac{3}{16}$ que corresponde a quantidade comida por Miguel. Como as frações possuem denominadores diferentes, é necessário recorrer a obtenção de uma fração equivalente reduzindo, por fim, os denominadores a uma mesma unidade.

A questão “d” solicita a identificação da fração que representa quanto da barra de chocolate não foi comida. Para isso, basta subtrair, da fração que representa toda a barra de chocolate, a fração $\frac{11}{16}$, resultando na fração $\frac{5}{16}$. Sendo assim, essa questão consiste em aplicar o conceito de subtração de fração com denominadores iguais em uma situação particular.

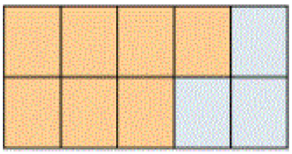
AÇÃO 4 – Aula 9

Atividade 3

(RIPOLL et al, 2017) Tendo como unidade um mesmo retângulo, as representações das frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ estão ilustradas nas figuras a seguir.



Fonte: Ripoll et al, 2017



Fonte: Ripoll et al, 2017

a) Determine uma subdivisão da unidade que permita expressar essas quantidades por frações com um mesmo denominador. Represente tal subdivisão nas figuras acima.

b) Escreva frações iguais a $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ a partir dessa subdivisão.

c) Existe alguma outra subdivisão, diferente da que você usou para responder os itens a) e b), com a qual também seja possível responder ao item b)? Se sim, qual?

d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

Atividade 4

1. (Elaborado pela autora) Todos os dias, Ana pedala 9 km até chegar em sua escola. Certo dia, o pneu de sua bicicleta furou completados $\frac{1}{3}$ do caminho. Por sorte, cerca de um quilômetro depois havia uma borracharia onde Ana empurrou a sua bicicleta até chegar no local. O pneu foi remendado e, mais que depressa, Ana pegou novamente a sua bicicleta e saiu em disparada para a escola. Completados $\frac{2}{3}$ do caminho Ana se deparou com uma feira de frutas e resolveu comprar uma maça. Por fim, depois de algum tempo, Ana chega a escola! E ainda bem que conseguiu chegar a tempo!

a) Faça uma reta numérica mostrando todo o percurso percorrido, em forma de fração, desde a casa de Ana até a escola. Além disso, na reta numérica represente em desenho a casa de Ana, o local da reta onde o pneu da bicicleta de Ana foi furado, a borracharia, a feira e a escola.

b) O pneu da bicicleta de Ana furou depois de quantos quilômetros percorridos?

c) Existe uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta furou? Explique.

d) Qual é a fração que representa a localização da borracharia?

e) Na reta numérica qual é o número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do caminho da casa de Ana até a feira?

f) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ do caminho?

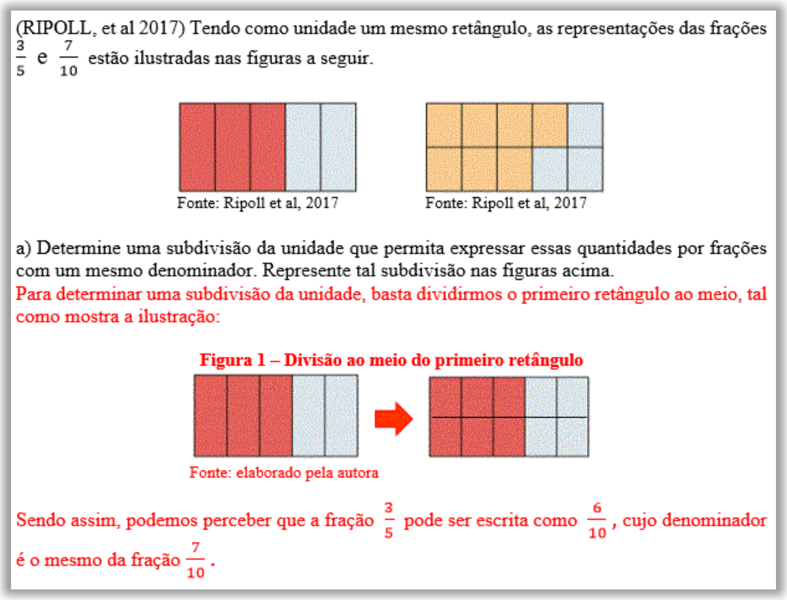
g) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{3}{9}+\frac{2}{3}$ do caminho? Explique.

ORIENTAÇÕES:

Esta aula consiste em dar continuidade a resolução de situações particulares. Sendo assim, serão propostas duas tarefas de aprendizagem: explorando as frações no retângulo, e explorando as frações no caminho para a escola.

A questão “a”, bem como a sua resposta esperada, pode ser visualizada na figura 27:

Figura 27 – Questão “a” da tarefa explorando as frações no retângulo



(RIPOLL, et al 2017) Tendo como unidade um mesmo retângulo, as representações das frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ estão ilustradas nas figuras a seguir.

Fonte: Ripoll et al, 2017 Fonte: Ripoll et al, 2017

a) Determine uma subdivisão da unidade que permita expressar essas quantidades por frações com um mesmo denominador. Represente tal subdivisão nas figuras acima.

Para determinar uma subdivisão da unidade, basta dividirmos o primeiro retângulo ao meio, tal como mostra a ilustração:

Figura 1 – Divisão ao meio do primeiro retângulo

Fonte: elaborado pela autora

Sendo assim, podemos perceber que a fração $\frac{3}{5}$ pode ser escrita como $\frac{6}{10}$, cujo denominador é o mesmo da fração $\frac{7}{10}$.

Fonte: elaborado pela autora

A questão “a” tem como objeto explorar o conceito de fração equivalente, reduzindo a fração $\frac{3}{5}$ a mesma unidade da fração $\frac{7}{10}$, por meio da subdivisão do primeiro retângulo.

Continuando, as questões “b”, “c” e “d”, bem como as suas respostas, são ilustradas na figura 28:

Figura 28 – Questões “b”, “c” e “d” da tarefa explorando as frações no retângulo

b) Escreva frações iguais a $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$ a partir dessa subdivisão.

Para escrever uma fração igual $\frac{7}{10}$, basta dividirmos o segundo retângulo da seguinte maneira:

Figura 2 – Subdivisão do segundo retângulo

Fonte: elaborado pela autora

Diante disso, temos que uma fração igual a $\frac{7}{10}$ é a fração $\frac{14}{20}$. O mesmo processo pode ser utilizado para obter frações iguais a $\frac{3}{5}$. Portanto, para obter frações iguais, ou melhor, frações equivalentes, basta realizar sucessivas subdivisões na unidade.

c) Existe alguma outra subdivisão, diferente da que você usou para responder os itens a) e b), com a qual também seja possível responder ao item b)? Se sim, qual?

Uma outra forma de obter frações iguais, ou equivalentes as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$, é multiplicado o denominador e o numerador de cada fração por um mesmo número. Para obter uma fração equivalente a $\frac{7}{10}$, basta multiplicar, por exemplo, o denominador e o numerador dessa fração pelo número 3. Assim, temos que a sua fração equivalente é $\frac{21}{30}$.

d) Juntas, as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior, menor ou igual a um retângulo? Explique.

Para isso, basta somarmos a fração que corresponde ao primeiro retângulo, que é $\frac{3}{5}$, mais a fração que representa o segundo retângulo, cuja fração é $\frac{7}{10}$. Como são denominadores diferentes, é necessário recorrer a uma mesma unidade. Como se sabe, a fração $\frac{3}{5}$ é equivalente a fração $\frac{6}{10}$. Diante disso, temos que $\frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$. Portanto, como o numerador é maior que a unidade podemos considerar que as regiões destacadas em vermelho e em bege determinam uma região maior que um retângulo.

Fonte: elaborado pela autora

A questão “b” consiste em explorar o conceito de frações equivalentes ao subdividir as retângulos que correspondem as frações $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$. Sendo assim, a medida em que subdivide os retângulos, mais frações equivalentes as anteriores são possíveis de obter.

A questão “c” também é relacionada ao conceito de fração equivalente. Dessa forma, para identificar frações que podem representar as $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$, basta multiplicar os numeradores e os denominadores por um mesmo número.

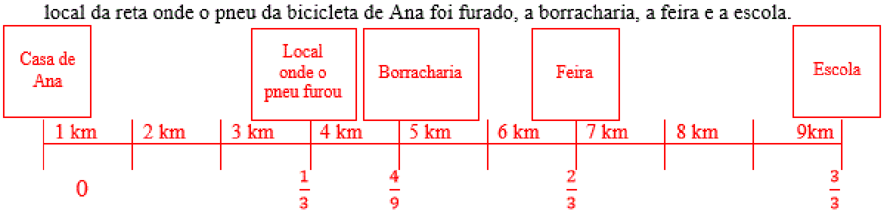
Por fim, a questão “d” constitui-se em determinar se as frações que correspondem a área vermelha e bege, juntas, determinam uma região menor, maior ou igual a um retângulo. Para responder a essa questão, basta somar as frações correspondentes as duas áreas, cuja resposta é a fração $\frac{13}{10}$. Esse resultado indica que as duas áreas juntas determinam uma região maior que um retângulo. Portanto, essa questão tem como objetivo explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes, o conceito de fração equivalente, e o conceito de frações impróprias, que é quando o numerador é maior que o denominador.

Prosseguindo, na figura 29, a seguir, traz a primeira questão, bem como a sua resposta, da **atividade 4:**

Figura 29 – Questão “a” da tarefa explorando as frações no caminho para a escola

1. (Elaborado pela autora) Todos os dias, Ana pedala 9 km até chegar em sua escola. Certo dia, o pneu de sua bicicleta furou completados $\frac{1}{3}$ do caminho. Por sorte, cerca de um quilômetro depois havia uma borracharia onde Ana empurrou a sua bicicleta até chegar no local. O pneu foi remendado e, mais que depressa, Ana pegou novamente a sua bicicleta e saiu em disparada para a escola. Completados $\frac{2}{3}$ do caminho Ana se deparou com uma feira de frutas e resolveu comprar uma maça. Por fim, depois de algum tempo, Ana chega a escola! E ainda bem que conseguiu chegar a tempo!

a) Faça uma reta numérica mostrando todo o percurso percorrido, em forma de fração, desde a casa de Ana até a escola. Além disso, na reta numérica represente em desenho a casa de Ana, o local da reta onde o pneu da bicicleta de Ana foi furado, a borracharia, a feira e a escola.



Fonte: elaborado pela autora

A questão “a” consiste em desenhar o caminho desde a casa de Ana até a escola de acordo com o que se pede no enunciado, a fim de criar subsídios para a compreensão do adição de fração e frações equivalentes que serão trabalhadas nas questões seguintes.

As questões “b”, “c”, “d”, “e”, “f” e “g”, bem como as suas respostas, podem ser visualizadas na figura 30, a seguir:

Figura 30 – Questões “b”, “c”, “d”, “e”, “f” e “g” da tarefa explorando as frações no caminho para a escola

b) O pneu da bicicleta de Ana furou depois de quantos quilômetros percorridos?
O pneu da bicicleta de Ana furou depois de 3km percorridos.
c) Existe uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta furou? Explique.
Sim, a sua fração equivalente, que é $\frac{3}{9}$
d) Qual é a fração que representa a localização da borracharia?
A fração que representa a localização da borracharia é $\frac{4}{9}$
e) Na reta numérica qual é o número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do caminho da casa de Ana até a feira?
O Número inteiro que representa $\frac{2}{3}$ do cominho é o número 6, pois Ana terá percorrido 6 quilômetros até feira.
f) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ do caminho?
$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Sendo assim, a fração $\frac{2}{3}$ indica que Ana se localiza na feira.
g) Qual é a localização de Ana se somarmos $\frac{3}{9}+\frac{2}{3}$ do caminho? Explique.
Como são frações com denominadores diferentes, é necessário reduzi-las a uma mesma unidade. Para isso, basta observar a reta numérica para perceber que $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$. Sendo assim, agora, é possível realizar a operação de adição $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}$. Portanto, a fração $\frac{3}{3}$ indica que Ana estará na escola.

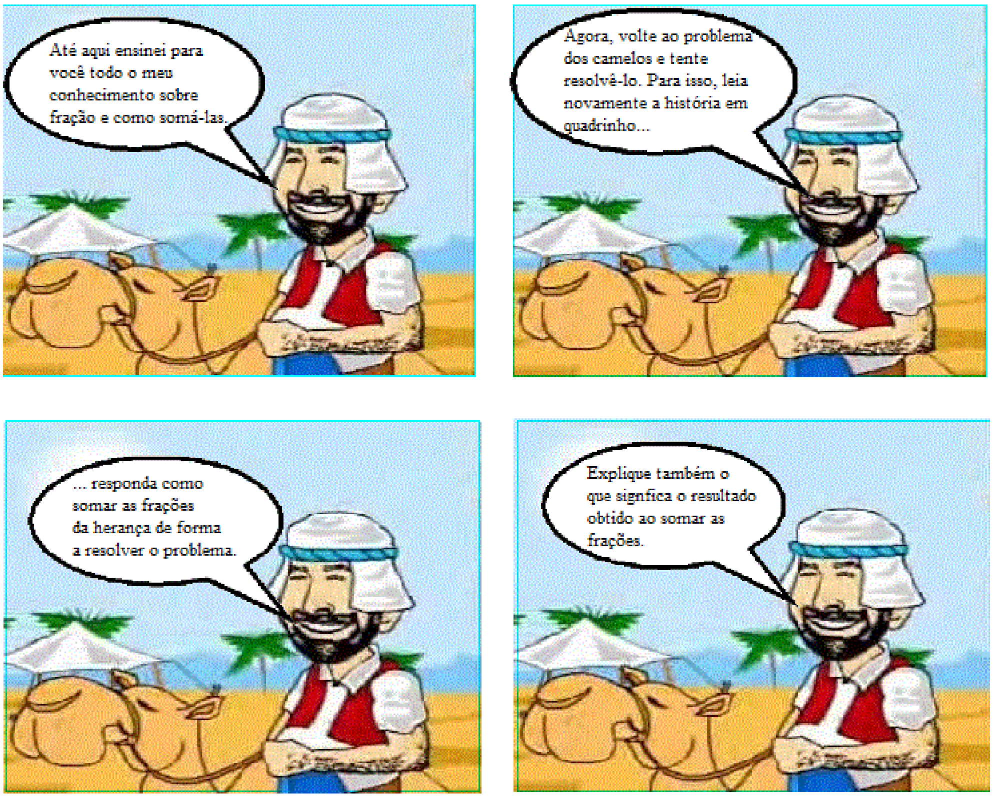
Fonte: elaborado pela autora

Na questão “b”, basta analisar o desenho realizado na letra “a”, a fim de identificar com quantos quilômetros percorridos o pneu da bicicleta de Ana furou. Assim, a fração que indica essa situação é $\frac{1}{3}$. Logo, a resposta é que o pneu furou depois de 3 (três) quilômetros percorridos. Portanto, esta questão tem como objeto explorar o conceito de fração equivalente, pois a unidade possui 9 (nove) repartições e, também, pode ser subdividida em 3 (três). Sendo assim, a fração que seria $\frac{3}{9}$ pode ser escrita como $\frac{1}{3}$, o que facilita responder que o pneu da bicicleta de Ana furou com 3 (três) quilômetros percorridos.

A questão “c” resume-se em determinar uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$, ou seja, se há uma outra fração que possa representar o local onde o pneu da bicicleta de Ana furou. Dessa forma, ao analisarmos o desenho realizado na letra “a”, é possível perceber que a sua fração equivalente é $\frac{3}{9}$.

Por fim, as questões “d” e “e” tem como objetivo explorar a localização das frações desde a casa de Ana até a escola. Em seguida, a questão “f” consiste em trabalhar a adição de fração com denominadores iguais e, a última questão, visa explorar o conceito de adição de fração com denominadores diferentes.

AÇÃO 5 – Aula 10



Fonte: elaborado pela autora.

Fonte: elaborado pela autora

ORIENTAÇÕES:

Esta tarefa visa o monitoramento das ações realizadas anteriormente por meio de um exame qualitativo, ou seja, “[...] equivale à avaliação dos alunos por si próprios, tendo como referência o conteúdo de suas ações [...]” (FREITAS, 2016, p. 414-415).

Dessa forma, antes da avaliação, os alunos voltarão ao “Problema dos Camelos”, a fim de solucioná-lo. Assim, espera-se que, baseando-se nos conhecimentos apropriados nas ações de aprendizagem anteriores, os alunos possam, agora, não somente utilizar a operação de adição com denominadores diferentes, mas compreender a sua essência. Nesse sentido, ao somar as frações da herança, objetiva-se que os alunos compreendam que é necessário reduzir os denominadores das frações a uma mesma unidade, recorrendo ao conceito de frações equivalentes, tal como mostra a figura 31:

Figura 31 – Somando as frações da herança recorrendo a frações equivalentes

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=?$$

Vamos somar, primeiro, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$. Como são denominadores diferentes, devemos reduzi-los a uma mesma unidade. Para isso basta multiplicar a fração $\frac{1}{2}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{3}$ e, em seguida, multiplicar a fração $\frac{1}{3}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1x3}{2x3}+\frac{1x2}{3x2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Agora, iremos somar a fração $\frac{5}{6}$ com a fração $\frac{1}{9}$ que restou. Como são denominadores diferentes, devemos reduzi-los a uma mesma unidade. Para isso basta multiplicar a fração $\frac{5}{6}$ pelo denominador da fração $\frac{1}{9}$ e, em seguida, multiplicar a fração $\frac{1}{9}$ pelo denominador da fração $\frac{5}{6}$:

$$\frac{5}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5x9}{6x9}+\frac{1x6}{9x6}=\frac{45}{54}+\frac{6}{54}=\frac{51}{54}$$

Podemos simplificar essa fração, dividindo o numerador e o denominador por 3 (três):

$$\frac{51\div3}{54\div3}=\frac{17}{18}.\ \text{Logo, } \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$$

Fonte: elaborado pela autora

Ao obter a fração $\frac{17}{18}$, os alunos devem explicar o seu significado em relação a resolução do problema. Assim, como nas ações de aprendizagem anteriores foi abordada a fração representando tanto numérica quanto geometricamente a unidade, espera-se que os alunos compreendam que a fração $\frac{17}{18}$ não equivale ao todo, ou seja, falta $\frac{1}{18}$ para completar o todo. Neste caso, o todo é a herança dos 35 camelos:

> Tudo resultou, em resumo, do fato seguinte: Houve um erro do testador. A metade de um todo, mais a terça parte desse todo, mais um nono desse todo não é igual ao todo. Vejam: 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18. Para completar o todo, falta, ainda, 1/18 desse todo. O todo, no caso, é a herança dos 35 camelos. 1/18 de 35, é igual a 35/18. A fração 35/18 é igual a 1 e 17/18. Conclusão: feita a partilha, de acordo com o testador, ainda haveria uma sobra de 1 e 17/18. Beremiz, com o artifício empregado, distribuiu os 17/18 pelos três herdeiros (aumentando a parte de cada um) e ficou com a parte inteira da fração excedente (TAHAN, 2007, p. 1).

Após responderem ao problema, os alunos devem realizar, na atividade impressa, uma avaliação qualitativa de si próprios, tal como mostra a figura 32. Posteriormente, as soluções para o "Problema dos Camelos", bem como a avalição sobre o desempenho e o que compreenderam durante todas as aulas do experimento de ensino, serão discutidas entre a turma.

Figura 32 – Local da atividade impressa que o aluno deve realizar a avaliação qualitativa da aprendizagem

Fonte: elaborado pela autora

Após o cumprimento das ações de aprendizagem, espera-se que os alunos possam demonstrar uma apropriação do processo lógico e histórico do conceito de fração, surgindo devido a uma necessidade humana em medir, e do conceito do nosso objeto de estudo que é a adição de fração com denominadores diferentes, bem como a sua relação geral, que é a determinação de frações equivalentes para reduzir os denominadores a uma mesma unidade

Avaliando a aprendizagem:

A sexta ação de aprendizagem consiste em avaliar os alunos, se estes assimilaram ou não “[...] o procedimento geral de solução da tarefa de aprendizagem, se o resultado das ações de aprendizagem correspondem, ou não, e em que medida, ao objetivo final” (DAVYDOV, 1988, p. 176). Para isso, segundo Freitas (2016), no momento da avaliação, o professor pode se orientar por uma pergunta, por exemplo, se o aluno se apropriou da relação geral do objeto e a aplica em situações particulares.

REFERÊNCIAS

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Gradiva, 2002.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental:** A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia. Tradução José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas. Moscú: Progreso, 1988

FREITAS, R. M. M.; LIMONTA, S. V. A educação científica da criança: contribuições da teoria do ensino desenvolvimental**, Revista Linhas Críticas,** Brasília, v. 18, n. 35, p. 69-86, jan./abr. 2012.

FREITAS, R. M. M. Formação de conceitos na aprendizagem escolar e atividade de estudo como forma básica para a organização do ensino**, Revista Educativa**, Goiânia, v. 19, n. 2, p. 388-418, maio/ago. 2016.

MARTEN, G. H.; MINELLA, J. P. Qualidade da água em bacias hidrográficas rurais: um desafio atual para a sobrevivência futura. **Revista Agroecologia e Desenvolvimento Rural Sustentável**, Porto Alegre, v. 3, n. 4, p. 33-38, out/dez. 2002.

RIPOLL, C. C.; SIMAS, F.L.B.; BORTOLOSSI, H. J.; GIRALDO, V. A.; REZENDE, W. M.; QUINTANEIRO, W. S. **Frações no ensino fundamental**: volume 1. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA-OS), 2017.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar:** inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

SANTOS, S. F. **O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações**. 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2019.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <http://www.matematica.seed.pr.gov.br/arquivos/File/Problemas_matematicos/solucao_35_camelos.pdf> Acesso em: 04 ago. 2020.

REFERÊNCIA DAS IMAGENS

Figura 1 – Baremiz Samir

Fonte: matematnews. Disponível em: <http://matematnews.blogspot.com/2011/04/o-homem-que-calculava.html> Acesso em 16 de setembro de 2019.

Figura 2 – Os três irmãos da herança

Fonte: fatoseangulos. Disponível em: <http://fatoseangulosbloginfo.blogspot.com/2012/07/a-partilha-dos-35-camelos-conhecimento.html> Acesso em 17 de setembro de 2019.

Figura 3 – Beremiz Samir e o irmão mais velho

Fonte: youtube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Wwh81lcGU3U> Acesso em 17 de setembro de 2019.

Figura 4 - Camelos

Fonte: vivamalbatahan. Disponível em: <http://vivamalbatahan.blogspot.com/2012/09/problema-dos-35-camelos.html> Acesso em: 17 de setembro de 2019

Figura 5 – Beremiz Samir

Fonte: malbatahan. Disponível em: <https://www.malbatahan.com.br/audiovisuais/videos/> Acesso em: 17 de setembro de 2019.

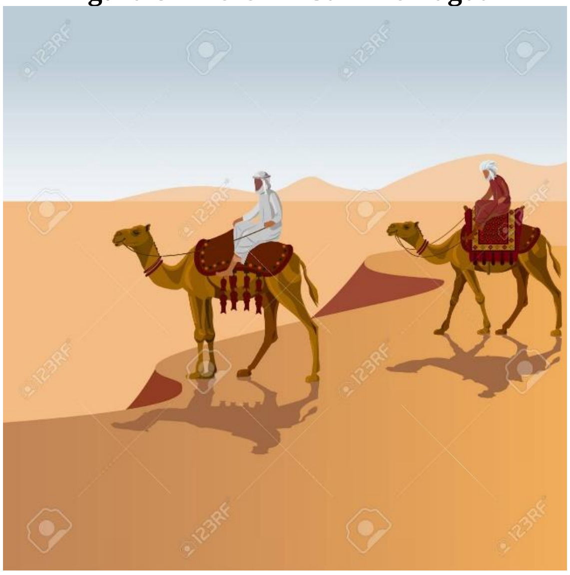
Figura 6 – Beremiz Samir e o irmão mais novo

Fonte: matematiqueza. Disponível em: <http://matematiqueza.blogspot.com/> Acesso em: 17 de setembro de 2019.

Figura 7 – Os três irmãos da herança (figura 2 ampliada)

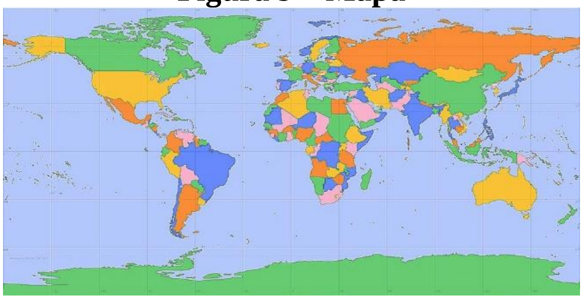
Fonte: pibidmat. Disponível em: <http://1pibidmat.blogspot.com/2013/04/video-malba-tahan-partilha-dos-35.html> Acesso em: 17 de setembro de 2019.

Figura 8 – Beremiz Samir e Bagdáli



Fonte: 123rf. Disponível em: <https://br.123rf.com/photo_87337919_dois-homens-%C3%A1rabes-andando-de-camelo-no-deserto-ilustra%C3%A7%C3%A3o-do-vetor.html> Acesso em: 18 de setembro de 2019.

Figura 9 – Mapa

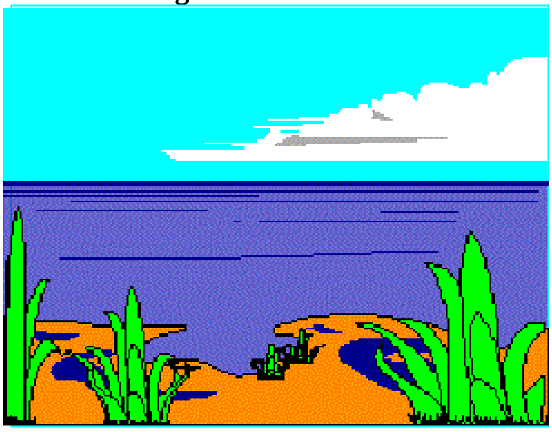


Fonte: Painel Global. Disponível em: <http://www.painelglobal.com.br/>Acesso em: 14 de outubro de 2017.

Figura 10 – Imagem de satélite do Egito

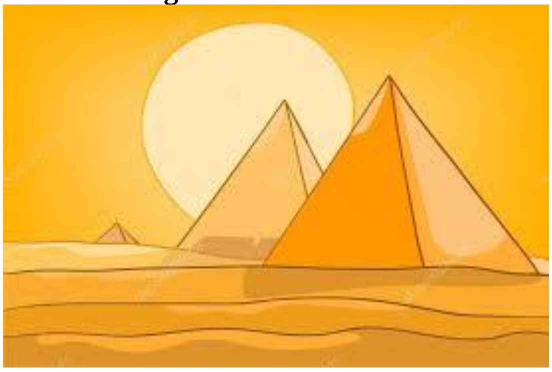
Fonte: falando sobre seres humanos. <http://falandosobreseres humanos.blogspot.com.br/2015/05/alexandria.html>. Acesso em: 14 de outubro de 2017.

Figura 11 – Rio Nilo



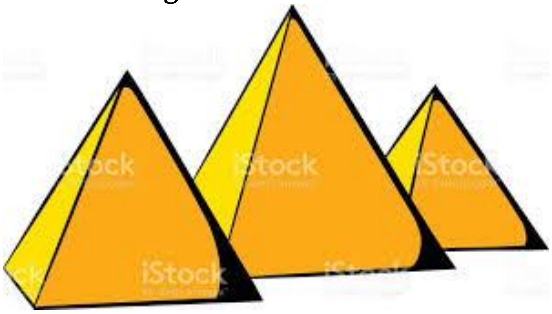
Fonte: software HagáQuê

Figura 12 – Pirâmides



Fonte: Depositphotos. Disponível em: <https://pt.depositphotos.com/9797887/stock-illustration-cartoon-nature-landscape-pyramid.html>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 13 – Pirâmides



Fonte: Istock. Disponível em: <http://www.istockphoto.com/br/vetor/desenhos-animados-de-%C3%ADcone-de-pir%C3%A2mides-eg%C3%ADpcias-gm696028850-128834901>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

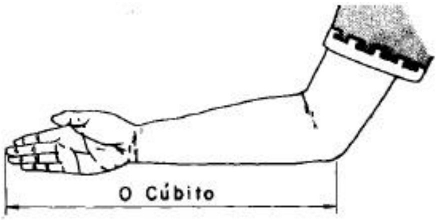
Figura 14 - Faraó

Fonte: Depositphotos. <https://pt.depositphotos.com/18477731/stock-illustration-cartoon-pharaoh.html>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 15 – Cordas com nós

Fonte: Dreamstime. Disponível em: <https://pt.dreamstime.com/foto-de-stock-feche-acima-do-tiro-de-uma-corda-com-uns-quatro-n%C3%B3s-isolados-image6153540>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 16 – O cúbito

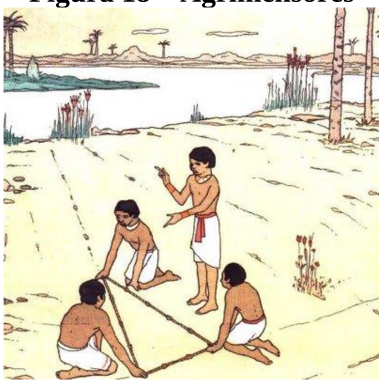


Fonte: Site Discovery. <http://discoveryef.blogspot.com.br/2017/02/metrologia-industrial-basico-como.html>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 17 – Agrimensores

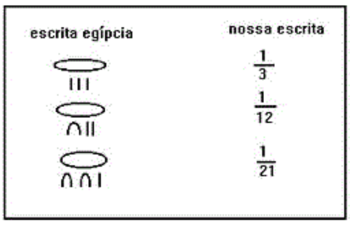
Fonte: Usuários.upf. Disponível em: <http://usuarios.upf.br/~pasqualotti/hiperdoc/natural.htm>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 18 – Agrimensores



Fonte: blogspot. Disponível em: <http://lamatematicaegipcia.blogspot.com.br/>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

Figura 19 – Frações



Fonte: Site ebah. <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAe8H8AA/matematica-fracoes>. Acesso em: 15 de out. de 2017.